METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT
REVISTA INTERNACIONAL DE ESTADISTICA

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER
DIRECTOR Y PROPIETARIO

Prof. Dott. Corrado Gini, *della Università di Roma*

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER — ADMINISTRADOR

Dott. Franco Mariani, *Istituto di Statistica della Università di Roma*

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRETAERE — SECRETARIOS DE LA REDACCIÓN

Dott. C. Benedetti, Prof. T. Salvemini
Istituto di Statistica della Università di Roma

Vol. XIX. - N. 1-2 **31-VII-1958**

SOMMARIO-SOMMAIRE-CONTENTS-INHALT-SUMARIO

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »

UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI (*secondo l'ordine di arrivo*).

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHED IN FUTURE ISSUES (*according to date of receipt*).

ARTICULOS LLEGADOS A LA REVISTA QUE SE PUBLICARÁN EN LOS PROXIMOS NUMEROS (*según el orden de su llegada*).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT (*d'après la date de reception*).

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN FOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN (*nach der Reihenfolge des Eingangs*).

CORRADO GINI — *Mathematics in Statistics.*

THOMAS A. L. AUSTIN JR. — *An Approximation to the Point of Minimum Aggregate Distance.*

CORRADO GINI

Logic in Statistics (1)

1. UTILITY FOR STATISTICIANS OF A DISCUSSION OF LOGICAL PROCESSES

In very few works on Statistics is there any discussion of the logical processes to be applied to collective phenomena. This is not surprising since, in many countries — among them Italy — there is not a single course on Logic at an advanced level.

In justification of such a gap, it may be adduced that man instinctively reasons in a logical manner, and that, therefore, teaching directed to this end is superfluous. The logicians of Port Royal recognised that the teaching of Logic only consists in showing how the human mind instinctively reasons and that sometimes those who have never studied the rules of logic from books reason better than those who have studied the subject systematically.

(1) This article reproduces Chapter XVIII of a course of lectures on *Statistical Methods with special reference to Agriculture*, given at the International Center for Training in Agricultural Economics and Statistics at Rome, January-May 1956. The course is in the press and will be issued by the International Statistical Institute and the Food and Agriculture Organisation of the United Nations. As in this article frequent reference is made to the other Chapters of the course, I think it useful to give the titles of all of them : Chapter I : *General considerations*, Chapter II : *Statistical surveys*, Chapter III : *Visual presentation of statistical data*, Chapter IV : *Averages*, Chapter V : *Statistical ratios*, Chapter VI : *Distribution of a collective phenomenon : various kinds and types of distributions*, Chapter VII : *Distribution of a collective phenomenon : variability and mutability*, Chapter VIII : *Distribution of a collective phenomenon : concentration*, Chapter IX : *Statistical relationships : relationships between distributions*, Chapter X : *Statistical relationships : relationships between modalities*, Chapter XI : *Relationships between more than two series. Relationships between series of groups. Relationships between terms of the same series*, Chapter XII : *Integration of data : gaps, errors, grouping of observations*, Chapter XIII : *Integration of data : unrepresentative surveys*, Chapter XIV : *Interpolation and adiustment of statistical series*, Chapter XV : *Direct problems and inverse problems of statistical research*, Chapter XVI : *Sampling and its main applications*, Chapter WVII : *Comparability of data and methods of elimination*, Chapter XVIII : *Logic in Statistics*, Chapter XIX : *Mathematics in Statistics*.

In fact it is possible to cite many persons who have begun their careers as teachers of logic, and then have passed to other branches of study and earned a justified reputation for original scientific contributions — such as K. Pearson and F. Y. Edgeworth — but who, on the other hand, have been criticised for their lack of logical strictness. There is, on the contrary, no lack of great scientistis — for example, Newton — who have been impeccable in their scientific reasoning, but who have formulated rules which are not all acceptable when they gave the theory of the logical processes that they have followed (See the *Regulae Philosophandi* of Newton).

An inquiry by Gini into the logical processes that doctors of medicine follow in making their diagnoses, has shown that these are not conscious of them. Not even in the writings of Augusto Murri, regarded as the non plus ultra of logical strictness, do we find the formulation of the logical process by which the diagnosis is reached from the symptoms observed.

This will not surprise us if we reflect on the immense bearing of the instinct, the result of a selection which has operated since life existed on the earth, that is for millions, if not for milliards, of years.

But instinct represents the adaptation of the organisms to conditions which are much more stationary than those in which human life has developed and continues to develop. Therefore, alongside the instinct, which provides for the immanent conditions of life, reason has developed in man, introducing a capacity for adaptation to all that is unexpectedly changeable in life.

The more mutable are the phenomena amongst which our lives are passed, the more must instinct be supplemented by reason. And since collective phenomena, which are the specific subject of study of Statistics, are those which are the most complex and subject to the greatest variations, it is natural that it is particularly useful for statisticians to receive some instruction in the logical processes supplementary to instinctive behaviour.

2. UTILISATION OF THE RESULTS OF STATISTICS

The results obtained by the use of statistical methods can be utilised for both practical and scientific purposes. Neither of

these is exclusive of the other. Scientific laws, established by means of statistical method can, in fact, as generally all laws can, have manifold applications. But when we speak of practical utilisations of statistical methods, we are referring especially to immediate practical purposes, such, for example, as the utilisation of statistical data by public administrations.

2.1. Utilisation of the results of statistics for practical purposes.

All sectors of public administration make extensive use of statistics, and should do so even more : the Ministry of Finance ought to know the wealth and the income of the nation ; Ministries of Agriculture, Industry and Trade ought to know the statistics of agricultural production, of industrial production and of international trade, and so on. The Central Offices of Statistics have the task of supplying the various sectors of the public administration with the data necessary for their proper working.

In the same way, statistics have their utility for private administration, so that large private firms (banks, commercial and industrial enterprises) form their own statistical offices in order to be continually abreast of phenomena which are important in their branch of business.

Even private individuals need to have recourse to statistical data in order to be able to regulate their activities ; thus travellers obtain information on the cost of living in the country to which they are going; farmers consult the meteorological statistics of the zone which they intend to cultivate; while the prices ot commodities in various countries form the basis of commercial transactions.

2.2. Utilisation of the results of statistics for scientific purposes.

Apart from these direct practical uses, the importance of which should not be underestimated, statistical data are of great importance in scientific research, both because they serve as points of departure and of arrival for the various branches of science, and because they constitute the basis of autonomous scientific research.

Utility of Statistics for the other branches of science. Geography, Economics, the Science of finance, Criminology, Astronomy and many other sciences often have recourse to Statistics for the material on the basis of which their theories are elaborated.

Sometimes, on the other hand, these same sciences and also others, such as Medicine and Ethnology, have recourse to Statistics in order to verify the deductions of their theories, whether it is a question of theories based on hypotheses of which it is necessary to test the reliability (as in the case of economic theories), or of theories based on too limited and approximate empirical observations (as is often the case in the medical sciences).

Autonomous scientific research. Statistics, however, reaches its highest scientific level when its data are used for autonomous research. It makes no difference whether the research is carried out by a professional statistician or, on the contrary, by an economist, a biologist, a meteorologist or a physicist. What is important is that the data which serve as the starting point and the conclusions which are reached, should have a statistical character, or, in other words, that they should be valid for collective phenomena.

At this point, it is advisable to examine the processes of scientific research more closely and, in particular, to draw attention to the adaptations and precautions which such processes demand, when they are applied to statistical phenomena.

3. THE PROCESSES OF SCIENTIFIC RESEARCH.

3.1. PURPOSES AND PHASES OF SCIENTIFIC RESEARCH.

It is commonly said that the purpose of science is the search for laws, or, in other words, of *constant relationships between two or more categories of phenomena*, and it is certain that this, if not the sole, is the principal purpose of science.

There are authors who give a more restricted definition of a law, defining it as the *necessary relationship between two or more categories of phenomena*. It is more restricted because everything that is necessary is constant, but not everything that is constant is necessary. Nevertheless it is certain that relationships of which the constancy was or is still proved only empirically, were and are termed laws, without any demonstration of their necessity

having been given for a certain time or even at any time : such, for example, have been Kepler's laws in Astronomy and such is Pareto's law of the distribution of incomes in Economics. Nor is there any reason to depart from the current significance of the word.

It is a widely accepted view that the search for laws should have three phases : a) *induction*, or the passage from particular observations or propositions to general, or more general, propositions which constitute laws ; b) *deductions* from these general propositions of other particular propositions ; c) *verification* of such particular propositions.

Afterwards, we shall pass to the practical applications of scientific laws, which — in current language — are called applied sciences.

All this however must be made more precise and complete.

The verification is not always indispensable and is sometimes impossible.

We believe mathematical propositions without verifying them. On the other hand, of such propositions, those that imply the infinite cannot be verified. In the case of others (for example, those of the calculus of probabilities), the verification has not the purpose of putting the exactness of the general propositions or of the deductions beyond doubt, but only of ascertaining that the facts observed are in full agreement with the general propositions.

In other cases, the verification is impossible or remains so for a long time, as happened in the case of the theories on the composition of the celestial bodies. Not for this reason, however, may the scientific character of the research be denied until the conclusions to which such research has led, have been verified ; at most, one may speak of incomplete scientific research.

In yet other cases, the verification leaves perplexities because it only partially agrees with the theoretical deductions ; this happened in the case of the wave and emission theories of the propagation of light, and is so in the case of some modern theories of atomic physics. The concrete results of the latter justify the doubt that the classical rules of scientific research may be too rigid, and that it is also sometimes necessary to cross with a jump an abyss which provisionally it is impossible to fill, in order to reach the more lofty peaks.

Another observation to be made is that negative results of a verification of the particular propositions deduced may depend on an error committed in the induction or in the deduction. The verification of the induction should therefore be distinct from that of the deduction and the traditional scheme modified ; the phases would then be four, instead of three : *induction*, *verification*, *deduction*, *verification*. Since, moreover, induction and deduction can be repeated, the verification would accompany either of them as many times as this was repeated, thus giving rise to more complicated schemes.

3.2. The inductive process.

A problem then arises.

Has not the first half of this process (induction, verification) perhaps a value in itself, independent of the further, possible phases, which are certainly interesting, but not always necessary ?

In fact, deduction and the verification of its conclusions are necessary only when the direct verification of the general proposition is not possible, so that it must be done indirectly through its consequences, but sometimes the general proposition attained through induction may be verified by testing if it is confirmed by other observations.

In such cases, by means of induction, we arrive at the formulation of a law; by the verification we guarantee that it is well founded ; a scientific investigation is, in this way, completed. It is possible to conceive a discipline which aims at arriving at a system of laws in such a way and which is, therefore, exclusively inductive.

Moreover, a scientific investigation can be limited to the phase of induction only. Such is the case when the question is one of *complete induction*. We have this when all the cases pertaining to a phenomenon are taken into consideration. The general proposition which is reached, is then certain, and it has no sense in this case to speak of verification since the verification of a law means making sure that it is valid outside the cases that have been used to establish it.

In contra-distinction to this, we can term *incomplete induction*

that which is based on a part of the cases which pertain to the phenomenon, even if sometimes the cases considered are very numerous.

Complete induction can only refer to a past phenomenon: for example, if a historian has established that all the kings of an extinct dynasty were of male sex, the law « in the said dynasty all the kings were male" is a certain law, which leaves no place to speak of verification.

We often have recourse to complete induction when we pass from particular laws to more general laws. When the first have been established (by incomplete induction or by deduction) for all the alternatives that a phenomenon can present, we pass to the general law of the phenomenon by complete induction. For example, having established by incomplete induction that the ruminants of each separate species have cloven hooves, we conclude — by complete induction — that all ruminants have cloven hooves. Or, having demonstrated deductively that a certain ratio between two quantities a and b exists if $a = b$, if $a > b$, if $a < b$, we conclude — by complete induction — that the said ratio between a and b always exists.

Incomplete induction is generally conceived as an attempt at complete induction which cannot be attained (as is always the case for phenomena which will present new cases in the future). The results of incomplete induction are accepted as a law in the belief that the cases not observed present the same results as the cases observed, on the basis of a general principle of the uniformity of the laws of nature which is instinctively admitted. It is said, in fact, that a great number of cases have to be observed and that, among these cases, no exceptions to the law must be observed. But sometimes the law is admitted, even when there are some rare exceptions, on the supposition that the exceptional cases can be subsequently explained.

In the experimental sciences, inductions of propositions general in character are also made on a small number of observations and, sometimes, even on a single observation, if the experiment is conducted with due precautions. In such a case, the induction (*experimental induction*) is based on the principle of causality, according to which the same causes always determine the same effects.

We shall return to this point again later (see pages 25-35).

Meanwhile let us establish that in experimental induction there is a *rigorous induction* even apart from complete induction.

Another example of rigorous induction, different from incomplete induction, is *mathematical induction* which is effected by means of recurring formulae.

Having demonstrated the validity of a law for n cases and shown that the law, which is valid for x cases, is also valid for $x + 1$, it is seen that the law is valid for any number of cases. In this case, on the basis of the induction, principles and theories of Mathematics stand.

We can thus conclude that laws can be established inductively by three processes:

a) rigorous induction (complete or experimental or mathematical);

b) incomplete induction (not rigorous) directly verified;

c) incomplete induction (not rigorous) indirectly verified through verifying the consequences deduced from the law.

There are authors who observe that incomplete induction, experimental induction and mathematical induction are obtained on the basis of a more general principle (the uniformity of laws of nature, the principle of causality, some mathematical principle or theory, respectively) and must therefore properly be considered not as inductive processes but as deduction from such principles. The only logical process which could properly be called induction would thus be complete induction. This, however, is a process rarely applicable in all its rigour. Whence came the principle, then, which would be the basis of the induction? We shall return to this problem later. Meanwhile I think that we cannot deny the foundation of the above remark on the deductive character of incomplete induction, experimental induction and mathematical induction, but, on the other hand, neither can we deny them the qualification of induction without changing the current significance of the word "induction". We must then conclude that the processes of induction and deduction are not mutually exclusive but overlap each other.

The induction with which we have dealt up to now, is sometimes called *amplifying* or *generalising induction.*

We can, however, speak of induction in another sense, when, for example, we say that we can induce that a certain murder has been committed by a certain person ; this is called *reconstructive induction*. It is a process that goes from the singular to the singular, and it is open to doubt whether such a process is scientific, since it does not lead to general propositions but is limited to the explanation of a single phenomenon.

It seems to me that such an explanation may certainly have a general interest which well merits the qualification scientific. We cannot deny this by saying that science is only concerned with laws, that is with general propositions, but must rather conclude that the discovery of laws is the main, but not the sole purpose of science.

We shall return to this point again (see page 15), but it should be stated immediately that such a process is not a generalisation but rather a deduction. Some authors add that it is an *uncertain* deduction, and conclude that the word " induction " is thus used with two different meanings : with the meaning of the passage from the particular to the general or from the general to the more general, and with that of uncertain deduction, two meanings which must be kept fully distinct.

I would be very reluctant to adhere to such a thesis. As a matter of fact, reconstructive induction (such as, for example, the identification of a murderer) may in some cases be uncertain, in other cases quite certain. Reconstructive induction may in fact be based on the same logical process, and proceed with the same rigour as experimental induction, with the sole difference that is is applied to a single fact and therefore has not a general bearing.

I would rather say that, according to the current meaning of the word, induction sometimes means the passage from the particular to the general or from the general to the more general, and at other times, the passage from the effect to the cause, which, when referring to individual cases has no generalising character. And in both meanings, induction and deduction overlap.

3.3. The deductive process and the hypotheses.

Let us now consider the deductive phase of the current scheme of scientific research.

If the deduction reaches propositions relative to known facts, it has no other scientific function than that of representing an indirect verification of the induction. If, on the contrary, it reaches propositions relative to new facts, it brings its own scientific contribution, as in the case of the existence of the planet Neptune, deduced by Leverrier from the deviations of the observed trajectory of Uranus in comparison with the expected one, and of which Galle subsequently verified the existence.

Here we have another case of a conclusion of a scientific character which refers to an individual case, and confirms our preceding assertion that the ascertainment of laws is the principal, but not the sole, purpose of science.

Likewise, deduction brings its own scientific contribution when it reaches general propositions, even if less general than those from which it started, as happens in the case of the conclusions of Mathematics, of theoretical Economics and other deductive sciences.

These have not, in fact, the sole function, and not even the main function, of serving as a verification of the inductive disciplines, also because the general propositions from which they start are often not the result of inductive research, but rather conclusions suggested by experience (whether on the basis of the observation of external facts or on that of introspection) and regarded as certain.

In this case we might speak of *implicit induction* in contradistinction to explicit induction, the object of the inductive sciences. The principles that are at the basis of the deductive sciences often take their origin from implicit induction.

This is generally admitted for some principles called *synthetic principles* : among which there is a category of the postulates of the physical sciences, and, according to some, also of the mathematical sciences, which are said to have an empirical basis. It is not generally admitted for the *principles*, called *analytical*, among which are other postulates of Mathematics and self-evident axioms. But one may wonder if these cannot be regarded as the result of an implicit induction based on introspection.

There may also be principles — as we shall see afterwards (pages 20-22) — (the principles of causality, of the uniformity of the laws of nature and of analogy) that we do not admit as a conse-

quence of our reasoning but are a condition on which our reason has been built and, therefore, may be called *inborn principles.*

In the case of inborn principles or of principles based on implicit induction, as in the case in which we start from a conclusion obtained by complete induction, the deduction normally has not the purpose of verifying the general propositions from which we started, since these do not seem to be subject to error (as in the case of mathematical axioms), and then we can even do without the verification, although experience teaches us that a verification may in some cases be advisable. In particular, implicit induction based on introspection should be distrusted, since it takes account only of conscious experience, and necessarily neglects the influence, which can be decisive, of the subconscious and the unconscious.

In other cases, the point of departure of the deduction is a pure *hypothesis.* Hypotheses can be divided into real, unreal and arbitrary according to whether they are taken into consideration because they are held to correspond to reality or despite the fact they are known not to correspond to reality, or, finally, independently of their correspondence to reality because of others of their properties, for example, their convenience. In the latter case, we often speak of "conventions" rather than of hypotheses.

When it is a question of real or arbitrary hypotheses, the purpose of the deduction may be to verify the foundation of the hypothesis. Real hypotheses are generally based on analogy, as is incomplete induction based on the principle of the uniformity of the laws of nature which may be considered a special case of the principle of analogy. But the analogy which suggests a real hypothesis may be quite different from that of the uniformity of the laws of nature, so that the deduction which aims at the verification of a hypothesis is rightly considered as a scientific process independent of the induction.

On the other hand, sometimes real or arbitrary hypotheses cannot be proved and, in the case of unreal hypotheses, there would be no sense in proof. These are however adopted (rightly or wrongly) on account of their simplicity or because of other characteristics which make them convenient, for example, the facts that they allow deductions which would otherwise be impos-

sible (as in the case of the hypothesis of equi-probability of causes in the determination of a posteriori probability).

It is necessary, however, to distrust deductions which are obtained from such hypotheses. In the best of cases (real or arbitrary hypotheses), the deductions have only a hypothetical character and the verification can only authorise the conclusion that the hypothesis considered represents a sufficient, but not necessary explanation. When the hypothesis is unreal, the deduction can lead to only approximate conclusions, even if they are often sufficient for practical purposes (thus, for example, for the determination of the average of a population classified in age-groups, when it is assumed that all the individuals of a group are of the same age, equal to half the sum of the limiting ages). The verification cannot in such a case have the purpose of ascertaining the degree of correspondence to the truth of the law, but only of bringing the approximation to light.

In conclusion, the function of deduction in scientific research is directed :

a) towards the indirect verification of laws obtained by incomplete (explicit or implicit) induction ;

b) towards the indirect verification of real hypotheses suggested by analogy, as well as of arbitrary hypotheses adopted, for example, by reason of their convenience ;

c) towards bringing to light more circumstantiated laws than those which formed the starting-point and which had been obtained by complete or otherwise rigorous induction or even not rigorous but reliable because based on a large number of observations. In such a case, if the deductive process is not too complicated, one can also do without the verification, although it is always advisable to distrust the results of incomplete induction based on introspection ;

d) towards bringing to light more circumstantiated generalisations than those expressed by the unverified or unreal hypotheses that formed the starting-point, generalisations which have only a hypothetical or approximate value, but which can be used when it is possible to evaluate the degree of the approximation or, at least, the direction of the bias ;

e) towards bringing to light new facts of general and therefore scientific interest.

Of the functions of the deductive process that we have examined, only the first has a purpose subordinate to that of the induction; the other four are independent thereof and the second, fourth and fith do not even presuppose any form of induction. It is therefore clear that purely deductive disciplines can exist and bear their autonomous contribution to scientific research.

It must also be observed that, in practice, the distinction between induction and hypothesis is not always so clear as in theory. Very often — and even in the majority of cases — we observe facts, but these, either because they are not numerous or not sufficiently numerous or because they are complicated, do not allow the induction of a law, even though they may suggest it. The facts are then arranged into a scheme which is admitted as a working hypothesis to be verified. And on the other hand, it may be that, although with different reliability, several alternative schemes can be constructed and, in such a case, in the successive verifications, it is necessary to take account of such different reliability even when, as is possible, the verifications do not lead to the exclusion of any of the schemes.

We have spoken of hypotheses verified indirectly through deduction. But hypotheses can also be verified directly and this is frequently done by experiment.

Moreover, a hypothesis can be demonstrated to be sure by the exclusion of all other hypotheses, that is by reduction to absurdity.

3.4. The ways to the scientific laws.

We are now able to detail the ways by means of which it is possible to arrive at the formulation of laws, that is to say, of constant relationships between groups of phenomena:

a) by rigorous explicit induction (complete, experimental or mathematical) from facts or from more particular laws;

b) by non-rigorous explicit induction from facts or from more particular laws, either verifying the law induced directly or indirectly through the deductions derived therefrom;

c) by deductions from inborn principles or principles established by implicit (external or introspective) induction;

d) by deduction from other, more general or equally general, laws established by esplicit induction ;

e) by hypotheses verified directly or through their deductions ;

f) by hypotheses demonstrated by reduction to absurdity.

It might be observed that, since generalisations are very frequent in the deductive sciences, to the ways of deduction stated above under *c*), *d*), *e*), that of the passage from general laws to still more general laws should be added. But, in reality, such generalisations are made on the basis of still more general principles or laws, so that this case can be included in those listed under *c*) and *d*).

The observation is however important because it shows how the same logical operation can be considered from a dual point of view : 1) as the passage from the more particular to the more general on the basis of a still more general principle or law (induction) ; 2) as the passage from the more general principle or law to the less general law, which is included in the former (deduction). This is in particular the case for mathematical induction. By adopting the second point of view, there are authors who, maintain that, as we have said, (cp. p. 8) incomplete induction is only a form of deduction which starts from the general principle of the uniformity of the laws of nature, and similarly, experimental induction may be considered as a deduction which starts from the general principle of causality.

Whatever be the logical process, it must be borne in mind that the validity of the conclusions reached depends, not only on the validity of the logical process, but also on the validity of the premisses. Therefore, when we speak of the certainty of the conclusions reached by complete induction we mean that the process of complete induction cannot in itself carry elements of uncertainty, but, if the afflrmations relating to single cases are uncertain, the conclusion to which the complete induction leads will remain uncertain to a corresponding degree. Similarly, when we said that the word " induction " is sometimes understood as " uncertain deduction ", we intended reference to the uncertainty of the deductive process, not to that — which may or may not exist — of the premisses.

Finally, we have pointed out that a deduction based on arbitrary hypotheses or, as some say, on conventions, must lead to conclusions which represent hypotheses or conventions, which can be convenient in that they represent a sufficient description and, in such a sense, a possible explanation of the reality, but that they do not in any case represent a necessary explanation.

All these processes serve not only to establish laws, but they can also lead to the discovery of new facts, which may also have importance for science.

3.5 The aim of science.

In reality, even those who attribute to science the exclusive aim of the discovery of laws must recognise that the discovery of facts is also important for science, since it is on these that many, if not all, of the laws are established or verified.

If the purpose of science is understood in such a restrictive sense, the discovery of new facts has not a scientific but a pre-scientific character.

However, the aim of science can be conceived more widely, and by scientific research we can mean every research which fruitfully increases our knowledge. This conception corresponds to the etymology of the word, as it does to the current use that is made of it in conversation when we speak, for example, of historical sciences. I would not, however, say that *any* increase of knowledge is a contribution to science. I would limit the scientific character to those contributions which have a general interest, being fruitful of other knowledge. According to this wider conception, as well as the discovery of laws, the purpose of science is also the discovery of new facts, whether these are important in themselves (as, for example, the discovery of the planets), or whether they serve as elements to establish or verify new laws.

Yet another purpose is the explanation of single known facts. This can be accomplished by the process known as reconstructive induction (which explains single facts by other single facts) or even by means of already established laws.

Often, the purpose is to explain categories of facts (the seasons, volcanic eruptions, individual development, etc.) ; when the

explanation brings to light constant relationships between the said categories and other categories of facts, it may be said that a law has been established.

The research examined up to now has all been within the sphere of theory. Some people affirm that science is limited to the theoretical field and that there is no such thing as an applied science but only applications of science.

We do not consider it necessary to adopt this point of view, the more so because from theory to practice is only a step. If, instead of making use of natural laws in order to have knowledge of the past, we utilise them to have knowledge of the future, we put ourselves in a position to foresee future events, which is of the greatest practical importance. Nor can it be seen why, if the former is scientific research, the latter is not also scientific research. If we utilise the natural laws, not to foresee future natural events, but to regulate future events produced by ourselves, we speak of " applications of laws ". But we do not see why the factor of the intervention of our will should cause this type of activity to be denied scientific character.

We have, thus, detailed the various phases and the various species of scientific research. We have dealt with these questions at length, because the operations examined : induction, formulation and verification of laws, deduction, explanation and prevision of facts, applications of laws, all demand particular precautions and reserves when they are applied to collective phenomena. For this reason a special chapter devoted to logic is required in Statistics.

4. CAUSALITY RELATIONSHIPS AND CORRESPONDENCE RELATIONSHIPS.

4.1. Various species of Laws.

Before passing to the exposition of these precautions and reserves, we shall pause a little on the concept of law and, in particular, on laws of causality and on the consequences deriving therefrom with regard to incomplete induction.

Scientific laws express, as we have said, a constant relationship between two or more categories of phenomena. Saying that the relationships must be *constant* does not mean that they must

be either *eternal* or *universal*. Like the juridical law, from which the scientific law has taken its name, the latter can vary from place to place and from time to time. The ratio between temperature and the boiling point of water is constant for all latitudes and longitudes and for all times, within the limits of human experience, but it varies as a function of altitude ; gravity is different on the different celestial bodies and, on the same celestial body, seems to vary in time, even though very slowly.

The constant relationship expressed by the law can exist between two phenomena that are produced at the same time or successively ; in the first case, we speak of *static* laws or laws of *co-existence* and, in the second case, of *dynamic* laws or laws of *succession*. Such laws are called laws of *first order*.

The laws that express the variations of static and dynamic laws in time and in space are called laws of *second order*. According to whether the variations considered happen in space or in time, they are called respectively *static* and *dynamic laws of second order*.

Amongst the laws of succession, it is important to distinguish laws of *evolution*, which express the relationships between the phenomena and time, and the laws of *causality*, which express relationships between the phenomena and their causes.

4.2. Causality relationships in particular.

Causality relationships are often very complex. Causes of the same nature can provoke very different and even opposite effects according to their intensity, their duration, the phase of development of the individual or of the population on which they act, and according to whether they disturb a pre-existing equilibrium or, on the contrary, re-establish a disturbed equilibrium.

Moreover, the effect produced by a cause (*primary relationship*) often provokes a reaction (*secondary relationship*), which is sometimes of a cumulative character, and at other times of a compensatory character. In the first case there is positive interdependence between two phenomena and it is not easy to distinguish cause from effect. In the second, the consequences can be very different from one case to another. It may happen that the reaction exceeds the primary action in intensity, giving rise to phenomena known as *hyper-reaction phenomena* ; thus the unfavour-

able conditions of nature can stimulate the activity and the inventiveness of the population to such an extent that they not only compensate for the initial unfavourability, but also provoke a greater development than that of populations which live under better natural conditions. It may happen — on the contrary — that the reaction is of negligible intensity.

Sometimes it is not noticed that it is a question of a secondary relationship, and effects are expected which do not happen, but, instead, contrary effects happen : economists, for example, considered that an increase of customs tariffs would be followed by a rise in prices, whereas extensive researches, carried out in several countries, have demonstrated the contrary ; the fact is explained by the circumstance that tariffs are increased when a reduction in prices is already in progress, so that the increase of the tariffs represents a secondary effect compensating, but only partially, in character of the trend of the prices towards a reduction.

When, in a law of succession, cause and effect are superposed on each other, either in the primary or in the secondary relationship, a law of co-existence derives therefrom. And, since this can happen in the direction of the primary relationship or in that of the secondary relationship, it is not always easy, and sometimes it is impossible, to infer from this to the law of succession, when the reaction is of a compensating character. The results may indeed be different from case to case. Thus, high production determines low prices, but these in their turn provoke a lowering of production ; the law of co-existence that derives therefrom is different in agriculture (where high production corresponds to low prices) and in industry (where high production corresponds to high prices). Nor is it always easy to establish which is the primary relationship and which is the secondary : is the price-production relationship or the production-price relationship primary. Here, too, the conclusion is not always the same. It may be said that if production increases because of the variation of a circumstance independent of prices (for example, favourable season) the primary relationship is that of production-prices while, if the prices increase because of the variation of a circumstance independent of production (for example, inflation) the primary relationship is that of prices-production ; in fact, however, the various circumstances are usually inter-woven.

Similarly, if there is interdependence by effect of a reaction of a cumulative character, it is sometimes difficult to distinguish the primary cause giving origin to the reaction, which in its turn becomes the secondary cause. The criterion of precedence is fundamental, but a posterior event can act as cause through prediction, as in the case of the predicted crop which determines the level of prices beforehand.

It may also be difficult to distinguish a causality relationship from a relationship existing between two effects of the same cause, especially if such effects do not happen simultaneously. Frequently, for example, the symptoms of an illness are confused with its causes.

Another difficulty is encountered when a cause has multiple effects in different directions ; it is then practically impossible, without conducting systematic surveys, to obtain a synthetic idea of the result of its intervention ; in general, we are, in fact, struck more by direct than by indirect effects, by immediate than by mediate effects. Only adequate statistical research, for example, allows the resultant of the manifold effects of war on the characteristics of the population to be estimated.

4.3. Correspondence relationships.

In view of all these difficulties, some students of the matter have judged preferable to renounce the study of causality relationships, limiting themselves in each case to a study of the relationships of correspondence existing among the terms of a law ; but this is a negative attitude which the scientist must overcome. In reality, even the determination of the relationships of correspondence has its utility since it always authorises a prediction, which may, in some cases, enable us to regulate our conduct, but only the knowledge of the causality relationships will allow us actively to intervene in the development of external phenomena. When it rains, umbrellas are open and when umbrellas are open, it is raining ; this correspondence relationship is useful because, before going out, I can look through the window and see if umbrellas are open, and so regulate my behaviour accordingly ; but it is not a matter of indifference with regard to my conduct, whether it is the rain which makes the umbrellas open (as is evident to us) or whether — on the contrary — the opening of the

umbrella provokes the rain (as those natives believe, who, it is related, in periods of drought, beg the missionary to open his umbrella in order to make it stop).

4.4. Essence and justification of the principle of causality.

The determination of causality relationships represents, then, the ultimate and most important aim of scientific research, and it is therefore natural to wonder in what the principle of causality consists and what is its rational justification.

The principle of causality is generally expressed by saying that every cause has an effect and that every effect has a cause. But, obviously, one can then fall into a vicious circle. Penetrating to the root of the question, we can say that *the principle of causality consists in the conviction that the succession of events that we observe is not accidental, but that the said events are bound to one another by necessary links so that their succession is repeated in different times and places, provided that the other conditions remain the same*. The admission of the principle of causality means admitting that time and place are in themselves without effect on the development of the events.

Now such a conviction is rooted in our psychology ; human behaviour is based on it, since those who have not taken account thereof have been eliminated by natural selection, and it is therefore useless to seek the rational justification thereof, since our reason has been formed in this behaviour. It is, as I have said (pages 10-11), an *inborn principle*.

Such a conviction is, moreover, at the basis of the behaviour, not only of human beings, even primitive ones, but also of the animals. It can, rather, be said that it is even more deeply rooted among primitive beings and among animals, since they do not seem to possess the concept of chance and so attribute the value of necessity to every succession of observed events.

The essential difference between the man and the animal is that — according to what is commonly thought — the latter profits from the immediate causality relationships that fall under his senses, but is incapable — at best as a rule — of establishing by means of reason, non-immediate relationships. Under the pressure of the necessities of life, the animal looks to the imme-

diate future, and does not worry about the past ; he passes from the cause to the effect, but not from the effect to the cause. The age of "why" and "because" marks the passage from the infantile intelligence of the animal phase to the human phase.

4.5. Observations on the concept of cause.

The principle of causality is not the only inborn principle. I have already mentioned as inborn principles the uniformity of laws of nature and the principle of analogy.

Without admitting the uniformity of laws of nature, we could not take advantage of our experience, and without having taken advantage of past experience, we could not be what we are, and we could not be capable of reasoning, which we are.

The principle of uniformity of laws of nature is however less rigorous than the principle of causality. As a matter of fact, in order that a principle may be rooted in our psychology by natural selection, it is not necessary that it is always true ; it is sufficient that it is true in most cases so that its adoption be advantageous.

The principle of uniformity of laws of nature may be considered a special case of the principle of analogy, in as much as it implies the analogy of the behaviour of nature in various cases ; but the principle of analogy has obviously a more wider scope and, in most cases, it is even less rigorous than in the case of the uniformity of laws of nature. According to it, to things (objects or even words) which appear similar is attributed the same effect. It is a principle that is at the basis of the behaviour of primitive peoples and which we also often indulge in irresistibly, in spite of the fact that it manifestly leads to error sometimes. On it are certainly based many prejudices. But, all in all, we may admit that it is useful and this explains why it has been rooted in human psychology. Once it was probably stronger than now, as it is to be admitted that primitive peoples reproduce primordial man in this as in other mental characteristics. Science has qualified and corrected it in the best explored field, but science too still has recourse to it on the frontiers of knowledge, in the formulation of hypotheses, as we have already remarked (page 11).

Also the principle of causality is more deeply rooted in the mind of primitive man than in that of civilised man, as we have said (page 20), and the above considerations and the sufficient conditions for a principle to become inborn, suggest the question if the principle of causality also, like those of uniformity of laws of nature and of analogy, may not have a general and universal validity.

The principle of causality implies that a given cause A always has one, and only one, effect *B*, but such ratio is not invertible. If *A* always has the effect *B*, this does not mean that *B* is necessarily the effect of *A* ; it can also be the effect of other causes. While every cause always determines the same effect, each effect can be, and often is, determined by various causes. For example, rain always wets the streets, but, if a street is wet, this does not necessarily mean that it has rained ; it may be, for example, that the street has been watered, or that a water-pipe has burst.

It may seem curious how some writers, and not the least important, have maintained that the same effects must be attributed to the same causes. This was the second of the *Regulae philosophandi* of Newton, although enunciated with the restriction " as far as possible ". Leibnitz did not think differently and there are modern writers, such as Rabier and Enriques, who maintain the same thesis and, moreover, without Newton's prudent restriction.

In justification of such a rule, the principle of simplicity might be put forward, but this principle cannot lead to the denial of so evident and frequent a phenomenon as that the same effect can be produced by different causes.

It seems to me likely that these authors give the word " effect " a sense different from that in which it is generally used. In defence of their thesis one could say that when we speak of the possibility that the same event is the effect of different causes, we consider only a part of the effects of these causes. Thus when we say that the street is wet, this is only a part of the effect of rain, of street watering or of a burst pipe : should we take account of the full effects, we would recognize that the same effect admits always the same causes.

Usually however, we consider isolated events and cannot connect them with all the other circumstances that have accompanied them as simultaneous effects of the same cause, so that

it is appropriate to say that the same events can be determined by different causes. This justifies the usual distinction between different categories of causes.

When the cause *A* always determines an effect *B*, but the latter can also depend on other causes, the cause *A* is called *sufficient cause* of B. When, on the contrary, the cause *A* always determines the cause *B* and *B* is determined only by *A*, *A* is said to be the *necessary and sufficient cause* of B.

There are other gradations of the concept of cause of which it is useful to speak.

A cause can be divided into several components which are also called *concauses* or *concomitant causes*.

Amongst the concauses various further categories must be distinguished.

The first category is that of *necessary concauses*, which occur when a certain effect is produced always and only by the joint action of certain concauses. For example, we admit that the genetic heritage of an organism with sexual reproduction is, as a rule, determined by the joint action of the following concauses: genetic constitution of the father, genetic constitution of the mother, reduction of the chromosomes of the male sexual cell, reduction of the chromosomes of the female sexual cell.

A second category consists of *suppletive concauses*. For example, in order that there may be pneumonia, the pneumococcus must be present. The pneumococcus represents a necessary concause of pneumonia. But its presence is not sufficient. It is necessary that another factor should be present: this can be either a trauma, a chill, an unfavourable condition of the organism or yet other circumstances. These are suppletive causes of pneumonia. They are not mutually exclusive but may be, — all or some of them — present at the same time: *f. i.*, as well as the pneumococcus, a trauma and a chill may be present at the same time.

Finally, there is a third category of concauses which may be termed *possible concauses*. For example, the death of a person may be caused by an illness, by a wound, by an accident or by senility and so on, but not always does one of these circumstances produce death. Sometimes illness, accident or senility combine with other circumstances, which may, moreover, vary from case to case. Illness, accident and senility, like the other concomitant

circumstances which may or may not be present, are therefore possible concauses of the death.

From another point of view, the distinction between causes (necessary or sufficient) and concauses (necessary, suppletive or possible) is important.

The principle of causality, which is expressed by saying that every given cause always has a given effect, refers to necessary and sufficient causes and to sufficient causes. The affirmation would be baseless if it were referred to concauses (necessary, suppletive or possible).

The same concauses in different circumstances normally give rise to different effects. Nor is it always easy to distinguish a cause from a concause, so that frequently the error is made of expecting from certain circumstances — which are regarded as causes, but which, in reality are concauses — different effects from those which really happen. Propaganda for large families, which may increase natality in countries where prolificness is rationalised, can have the contrary effect in countries where it is still dominated by instinct, since it calls attention to and provokes reflection on the economic aspect of the question, which had previously remained in the background. Unemployment, which in the last century was attributed in Ireland to the high birth rate of the population has, in this century, appeared, in some countries at least, as one of the limiting causes of births. We could use the term *di-effects* for the effects that a concause determines in concomitance with different other concauses. They must be clearly distinguished from *co-effects*, which are the concomitant effects determined by the same cause.

The complexity of the concept of cause does not seem to have been taken fully account of by John Stuart Mill when he enunciated the canons or methods of experimental induction which take their name from him, and in particular the fundamental methods of differences and concordances.

In view of the great importance generally attributed to such methods, and their wide application to statistical phenomena, we consider it advisable to deal with them separately, I would emphasize that, while the enunciations of the methods, although made with different words, are equivalent to those of Stuart Mill, their discussion is quite independent.

5. JOHN STUART MILL'S METHODS OF EXPERIMENTAL INDUCTION.

5.1. Method of differences.

The *method of differences* can be enunciated thus:

If a phenomenon (a) *happens in a case* (A) *and does not happen in a case* (B) *and the cases* (A) *and* (B) *agree in all the circumstances except for one circumstance* (b), *which happens in* (A) *and does not happen in* (B), (a) *is the effect or the cause or a necessary cause of* (b).

Now, first of all, it should be stated whether by "all the circumstances" for which (A) and (B) agree, only the present circumstances are meant or also the past ones.

If only the present circumstances are meant, the application of the method will be facilitated, since it is evidently easier to know the present circumstances than the past ones. But the method is then defective.

In fact, there can have been a circumstance (x) in the past in the case (A) and not in the case (B), which is the common cause of the presence of (a) and of (b) in (A) and not in (B). There would then be, as well as the two alternatives [(a) cause of (b) and (b) cause of (a)], a third possibility [(a) and (b) both effects of (x)]. Nor can it be excluded that, in this case, another circumstance (y) was present in (A) and absent in (B), and this — rather than (x) — can be the cause of the presence of (a) in (A), without also being the cause of (b). For example, if divorce is admitted in country (A) and not in country (B) and if the two countries (A) and (B) do not differ in the present by any other circumstance than that of language, it can happen that the two differences (admission of divorce and language) are the common effect of the circumstance that, in the past, country (A) was subject to the rule of country (x) which had caused the present language and divorce to be adopted, while (B) was independent, and it may also be that divorce was introduced in country (A) by the government of country (x), which ruled it during a certain period and that the language was introduced by the government of another country (y) which ruled it during a different period.

Understood in this sense, the enunciation of the method says too much.

If, on the contrary, all the circumstances are meant which are common to the two cases (A) and (B), including not only the present but also the past circumstances, there are only two alternatives : (a) is the cause of (b) or (b) is the cause of (a), since other different circumstances such as (x) and (y) cannot exist.

In this case, however, a difficulty arises.

If (a) is the cause of (b), what is the cause of (a) ? And if, on the contrary, (b) is the cause of (a), what is the cause of (b) ? In fact (a) and (b) in their turn must also have a cause, which exists in (A) and not in (B). Yet we have excluded the possibility of (A) and (B) differing in the present or having differed in the past by reason of a circumstance different from (a) or (b).

The conclusion is that the method of differences, as enunciated above, is applicable only when the circumstances (a) and (b) have a stability such that it is possible to neglect in practice the search for their causes. This sometimes happens : for example, populations that live at high altitudes have a lower stature than those that live at sea-level. The cause of the greater altitude of the territory (if it is admitted that it is the altitude which influences the stature) or the cause of the lower stature (if the difference of stature is considered to be original and the different altitudes of human settlements to be the effect of selection operated by the population in conformity with the pre-adaptation of their characteristics) are both so remote in time that, from the practical point of view, we can consider the differences observed as stable.

Apart from these limitations, the method of differences thus understood, may seem justified by the principle of causality. In fact the difference in relation to (a) or to (b) between cases (A) and (B) must have a cause and since different effects can only be produced by different causes, there must be another circumstance which differs in (A) and in (B). Since there is no other difference than the circumstance (b) or, respectively, (a) it is evident that (b) is the cause of (a) or, respectively, (a) is the cause of (b).

The method serves, then, to establish that there is a causality relationship between two circumstances, but not to decide

the direction of the relationship : if, that is to say, (*a*) is the cause of (*b*) or (*b*) is the cause of (*a*). In order to decide the direction, it is necessary to base ourselves on other elements.

The most frequent element is that of antecedence, the causality relationship being a dynamic or succession relationship.

It must be borne in mind in this connection that, if an event (*a*) is posterior to an event (*b*) but is forecast before (*b*) occurred, it acts as an event anterior to (*b*) : thus the forecast of a scarce crop acts as an antecedent determinant of the prices, which increase before the collection of the crop.

If it is not possible to establish by observation the antecedence of one of the two circumstances, it is sometimes possible to havere course to a reasoning which profits from other experiences.

It is to be observed, however, that it is not said that between two phenomena one is always the cause and the other always the effect. It may be that sometimes the one and sometimes the other constitutes the cause, even independently of any successive reaction. Thus in the relationships between supply and price, sometimes the price is the autonomous cause of the variations of the supply and at other times it is, on the contrary, the supply which is the autonomous cause of the variations of price. One must, moreover, consider, those reactions which are of a compensatory nature or, on the contrary, cumulative ; action and reaction can follow each other with such frequency as to render the identification of the autonomous cause difficult, so that the relationship should then be considered as a correspondence relationship.

The limitations of the method of differences, just illustrated, arise from the fact that, according to the said enunciation, it aims at establishing a dynamic relationship, as is that of causality, on the base of static relationships, as are the differences and concordances among co-existing circumstances. It is natural that this is not possible, except on determined hypotheses and with certain limitations.

It is not however indispensable to give to the enunciation of the method of differences this static character, nor does the method present such a static character in its applications to experiments. In these, a new circumstance is introduced into a system in equilibrium, all the other circumstances remain-

ing unvaried, and all the events which follow therefrom are considered to be the effect of the new circumstance introduced. The enunciation of the method of differences in its dynamic variant can then be the following :

If, in a situation of equilibrium (B), *a new circumstance* (a) *is introduced, all the others remaining unchanged, and the situation* (A) *which derives therefrom presents a new circumstance* (b), *it will be said that* (a) *is the cause or concause of* (b).

In this case, it is not necessary to suppose that the circumstance (*a*) is stable, nor is there any doubt on the direction of the causality.

We have, however, added the condition " in a situation of equilibrium " ; this addition is necessary because, if there is not a situation of equilibrium, it may be that the intervention of the new circumstance (*b*) is due to the process of re-establishing equilibrium anterior to the intervention of the circumstance (*a*).

On the other hand, it cannot be denied that, in the field of the social sciences, it is not always easy to decide whether a situation is or is not in equilibrium.

Since the dynamic method is more efficacious than the static one, recourse should be had to the latter only when the dynamic method cannot be applied. This is often the case for the social sciences which, for the most part, cannot avail themselves of experiment.

Even in the dynamic variant, the method of differences does not, however, lead to an unequivocal conclusion.

It can happen, in fact, that (*a*) is the necessary and sufficient cause of (*b*), but it may also happen that (*a*) is the sufficient, but not necessary, cause of (*b*). For example, the culture of a certain organism — all the other conditions remaining unchanged — is subjected to the treatment of a certain reagent which determines an increase of mutations ; one will be justified in considering that the reagent in question is sufficient cause of the increased mutations, but not that it is also the necessary cause, there being other treatments which might have had the same effect.

It may also happen that (*a*) determines (*b*) only when it happens concomitantly with another circumstance (*c*) which is present in both the cases (*A*) and (*B*). In such a case (*a*) would

be the concause or concomitant cause of (*b*) : it may be a necessary or a suppletive concause. A trauma is followed by pneumonia : traumatic pneumonia. Can the trauma be considered as the (necessary and sufficient) cause of the pneumonia ? For a long time this was maintained, but after it was demonstrated that it was only a concomitant cause, the simultaneous presence of the pneumococcus being necessary. In this case it is a question of suppletive concause. Given the presence of the pneumococcus, the pneumonia could be caused by a circumstance other than the trauma ; for example, by a chill. The anti-biotic injection of a carefully controlled serum is followed by collapse : the only explanation is that it is due to a phenomenon of allergy arising from the fact that the patient had already previously undergone a similar injection, of which the doctor was not aware. The new injection in this case represents a necessary concause of the collapse and death ; other circumstances might have caused death, but not following an immediate collapse.

It is, finally, possible that (*a*) is neither the necessary and sufficient cause nor only a sufficient cause, and not even the necessary or suppletive concause of (*b*), but only one of the possible concauses which, by its intervention, can determine (*b*) in concomitance with (*c*), while it might also happen that (*b*) were also determined in other cases by another combination of causes (*d*) and (*e*), or (*g*) and (*h*), which, however, do not happen in either of the two cases (*A*) and (*B*). In a country of chronic conditions of poverty, a Government, despite the discontent of wide strata of the population, may yet remain in power because of the moral prestige of its members ; but if an unexpected scandal impairs such prestige, the Government falls. It would not fall if the economic conditions were prosperous. The scandal is a concause of the governmental crisis. It is a possible concause. The crisis could have happened because of the concomitance of a very different set of circumstances : for example, a variation of political tendencies even in prosperous economic conditions, or a diplomatic failure in conditions of international tension. In the social field, in which so many factors are interwoven, events very often depend on the intervention of possible concauses.

In order to take account of all these possibilities we have susbstituted, in the dynamic formulation of the method, for the

espression " necessary concause of b " the more general expression " concause of b ".

In conclusion, the method of differences, in its dynamic variant, applied in conditions of equilibrium, is able to establish the existence and also the direction of a causality relationship between (*a*) and (*b*), but it does not allow, in itself, a decision on the nature of the cause, that is to say, whether we have a necessary and sufficient or only a sufficient cause or, finally, a necessary or a suppletive or only a possible concause.

Nevertheless, if the method is applied, not only to the observation of the single pair of cases (*A*) and (*B*), but also to that of many other pairs of cases, in which the circumstances different from (*a*) and (*b*) vary from one pair to another, it is more difficult that, among the latter, there is present always the same concomitant cause (*c*) or the same combination of concauses (*d*) and (*e*). And this is the more difficult, the greater are the number of observations, so that, as these increase, it becomes more and more probable that (*a*) is the necessary and sufficient cause or at least the sufficient cause of (*b*).

All this pre-supposes that we are certain that in the cases (*A*) and (*B*) all the circumstances different from (*a*) and from (*b*) (or at least all those which are not already known to be indifferent) are the same. But in practice, when we cannot have recourse to experiment and must be content with observation, it is very difficult to ensure that this condition is satisfied and, failing such condition, the application of the method can and often does lead to erroneous conclusions.

Let us imagine a primitive people living quietly in isolation. One day a foreigner arrives and — something never before seen — he has a long beard ; the following day an epidemic breaks out. Apart from the arrival of the strange foreigner, no other circumstance appears to be modified and — hence — he is the cause of the epidemic : let his head be cut off and the evil spirit will depart with his blood. The error consists in believing that no other circumstance has been modified. Similar errors are not in fact lacking. Beliefs in the evil eye and enchantment, as well as many other prejudices are based on similar errors.

Even in experiments, there is a chance of such errors when it is not possible to control all the circumstances.

An expedient to avoid them would be to make the observation or the experiment in such a way that, although not being able to guarantee that all the circumstances different from (a) and from (b) are the same, their disturbing effects can at least be compensated. In the case of observation, recourse may be had to the principle of the compensation of accidental errors, of which we have already spoken (see Chapter XVII. 3.2.1.3), and which is basic to the measurement of many collective phenomena ; in the case of experiment, procedures have been studied for the attainment of a systematic compensation of disturbances, of which also we have already spoken in connection with the design of the experiments (see Chapter XVII.2).

We shall return to the subject later (see pages 44-45), but we can already recall that, in both cases, we base ourselves on more or less restrictive hypotheses.

A precaution to be recommended is that of making use of control data. We compare the case (B), in which the circumstance (a) is not present, not only with the case (A), in which it is present, but also with another case (A_1) in which it is not present, and all the circumstances of which are equal to those of (B). This precaution is especially employed in experiments based on the dynamic method of differences. Since, in the application of such variant, the two cases (A) and (B) differ, not only in relation to the circumstances (a) and (b), but also in relation to the circumstance " time ", (A) being successive to (B), it is necessary to exclude, by means of the procedure of controlling (B) with (A_1) simultaneously with (A), the possibility that, with time, some other circumstance has varied which had escaped us, and which is causing the difference between case (A) and case (B) (the indifference of " time ", in itself, — as has been said — is implicit in the principle of causality). This possibility is obviously higher the longer the time taken by the experiment.

5.2. Method of Concordances.

At first sight the *method of concordances* seems symmetrical to that of differences, but it is, on the contrary, substantially different. It can be enunciated thus :

If a phenomenon (a) *happens both in a case* (A) *and in a case* (B) *and the cases* (A) *and* (B) *differ from each other in all circum-*

stances except one circumstance (b) *in which they agree, it can be stated that* (a) *is the cause of* (b) *or* (b) *is the cause of* (a).

Here also, it must be observed, as in the case of the method of differences, that, if the expression " all the circumstances " refers only to present and not to past circumstances, we cannot exclude the possibility of another past circumstance (x) common to the two cases (A) and (B) wich is at the same time the cause of the circumstances (a) and (b), nor the possibility of two past circumstances (x) and (y) of which one is the cause of (a) and the other of (b).

Interpreted in the other direction, the method of concordances would say that, if in both the cases (A) and (B) the same circumstances (a) and (b) are present, all the other present and past circumstances being different, (a) would be the cause of (b) or (b) the cause of (a). Should the same effects in (A) and (B) stem from the same causes, it would also exclude the possibility of (a) being the necessary or suppletive concause of (b) or (b) of (a), since no other circumstance (c) which was conconcomitant with (a) or with (b) could be common to thè two cases (A) and (B).

This does not, however, exclude that (a) is only the sufficient cause of (b) [or (b) the sufficient cause of (a)], since it is possible that there exists another circumstance (d) or (e) or (f), which cannot figure among the " other circumstances ", being alternative to (a) [or respectively to (b)] and which could determine (b) [or respectively (a)].

Likewise it may be observed that the method of concordances, like that of differences according to the above enunciation, leaves the direction of the causality relationship uncertain: whether, that is to say, (a) causes (b) or (b) causes (a), but with the aggravating circumstance that the method of concordances is necessarily static in so far as (a) and (b) are concerned. A dynamic relationship implies, in fact, the intervention of a new circumstance, which means a variation, and which therefore takes us into the sphere of the method of differences.

A new circumstance (a) can — it is true — intervene simultaneously in both cases and in both be followed by the circumstance (b), which would make us conclude that (b) is the effect of (a), but it would not then be a question of the application of

the method of concordances, but of a double application of the method of differences.

But the two methods (of concordances and of differences) show another substantial difference. This is due to the fact that, while different effects must derive from different causes, the same effects do not necessarily derive from the same causes.

If, therefore, (A) and (B) both present the circumstance (a) [or the circumstance (b)], it is not said that in both cases the circumstance (a) [or (b)] has the same cause, which could only be (b) (or respectively (a)). It may very well be that (a) depends in case (A), for example, on the circumstance (c) or on the combination of circumstances (c) and (d) and, in case (B) on the circumstance (e) or on the combination of circumstances (e) and (f), while (b) is entirely indifferent to (a). If, for example, two countries have the same wealth and the same latitude and differ in all other circumstances, present and past, one is not justified in concluding that the equality of wealth is caused by the equality of latitude, nor that the equality of latitude is caused by the equality of wealth. The wealth of (A) may depend, for example, on the hard-working character of the population and that of (B) on the other hand, on its warlike qualities which have procured it a great deal of loot, while the latitude has nothing to do with the wealth of the two countries.

While, therefore, the method of differences is correct, that of concordances is wrong from the logical point of view.

The possibility that the same circumstance (a) [or (b)], which is present in the two cases (A) and (B), derives from different circumstances (c) or (e) or from different combinations of circumstances, for example, (c) and (d), while the circumstance (b) [or (a)] that happens simultaneously is perfectly indifferent to (a) [or respectively to (b)], is an appreciable and even considerable possibility when only two cases are considered, (A) and (B); but this evidently decreases with the increase of the number of cases and can even be negligible when these are very numerous.

Thus, if — for hypothesis — all the countries that had the same latitude also had the same wealth, it would be difficult to escape the conclusion that wealth depended on latitude or that latitude depended on wealth even though it were impossible to see the reason.

The induction of a causal relationship becomes even more reliable when not only does (*b*) happen every time that (*a*) happens, but, moreover, every time that (*a*) does not happen, nor does (*b*) happen, all the other circumstances still being different.

This can be called the *method of double concordance* and also presents some analogy with the method of differences in its application to several cases, from which it is however distinguished by one essential characteristic : while, in fact, in the method of the differences all the circumstances different from (*a*) and from (*b*) must be equal, both when (*a*) and (*b*) happen and when (*a*) and (*b*) do not happen, in the method of double concordance they must be different. Through the method of double concordance we can grant that a causal relationship passes between (*a*) and (*b*), but we cannot affirm that it is a question of a necessary and sufficient cause, it may be that (*a*) is only a necessary concause of (*b*), or (*b*) of (*a*).

On the other hand, as in the application of the method of differences, in practice the difficulty arises of establishing that all the other characteristics are equal, so in the application of the method of concordances, the difficulty arises, in practice, of establishing that all the other present and past circumstances are different, a difficulty which is harder to overcome in the case of the method of concordances.

In fact, in the method of concordances, recourse may be had to other knowledge or to the control procedure (and the method of double concordance represents an application of such procedure) and, up to this point, the conditions of applicability of the two methods, of differences and of concordances, are the same.

But, in the application of the method of concordances, recourse can not be had to the principle of the compensation of accidental or systematic disturbances, as is done in the method of differences. Since, in fact, all the other circumstances must be different, there is no place for compensation, nor, on the other hand, is it possible to render different the effects of those possible unknown circumstances which — contrary to what is demanded by the method — might be the same.

Moreover, the multiplicity of observations made to render it improbable that some circumstances may escape our examination is much less effective in the application of the method of concor-

dances than that in the method of differences. And this is so, not only in the case of observation, but also in the case of experiment, since it is more difficult to make all the circumstances different than to make them all the same : in successive experiments, for example, the instruments, the experimenter and the place of the experiment are in general the same and to make them different introduces a considerable complication.

Besides the method of differences and that of concordances, John Stuart Mill considered two other methods of experimental induction: the method of comcomitant variations and the method of residues.

5.3. Method of concomitant variations.

The method of concomitant variations can be enunciated thus: *If a circumstance* (a) *varies in a certain direction and with a certain intensity when another circumstance* (b) *also varies in a certain direction and with a certain intensity,* (a) *is the cause or concause of* (b) *or* (b) *is the cause or concause of* (a), *or, again, both of them are effects of some common causes or concauses.* The variations of (*a*) and of (*b*) do not necessarily have to happen at the same time, but one can follow the other after a certain interval. Nor is it necessary that (*a*) and (*b*) should vary in the same direction, or with the same intensity. All that is necessary is that, between the variations of (*a*) and of (*b*) there is a correlation, positive or negative.

The enunciation says nothing with regard to the other circumstances. If it is supposed that these remain the same, the method evidently comes within that of differences, of which it then constitutes a particular case (*method of differences applied repeatedly*). If, on the contrary, it is meant that these can vary, then — admitting that they vary in all possible ways other than that in which (*a*) and (*b*) vary — it may be considered that the method comes within that of concordances; it could be given the name of *method of graduated concordances.*

Applied to a sufficient number of variations, so as to exclude a chance concomitance, the method is reliable. A conclusion about the degree of the correlation is obviously more incertain than that about its existence.

5.4. Method of residues.

The *method of residues*, of which we have already spoken in Chapter XVII, can be enunciated thus: *If from the effect of a group of causes the effects of some causes are taken away, the residue is the effect of the remaining causes.*

This is, evidently, not a method of induction of causes, but a method intended to determine the quantitative influence of single causes or groups of causes, which are supposed to have been identified otherwise. The method, as has already been said, is only admissible on the additive hypothesis of the effects.

6. SPECIAL PRECAUTIONS AND PROCEDURES IN THE APPLICATION OF SCIENTIFIC RESEARCH TO COLLECTIVE PHENOMENA

After having reviewed the different phases of scientific research, we must ask ourselves whether, applied to collective phenomena, they present peculiarities worth pointing out, such as to make the applications easier or, on the contrary, more difficult; and, in the latter case, what special precautions and procedures are to be adopted.

For this purpose, we shall again consider all the various phases of scientific research and also separately examine the symptomatology of causes and the process of generalisation.

The symptomatology of causes deserves, in fact, to be scientifically developed more than it has been, since, if it is important to be able to determine the causes and to measure the influence of each of them, it is also important to be able to predict the intervention thereof, or, at least, to be aware of its presence, as soon as it becomes active.

As for generalisation, of which we have spoken more than once, and which often represents the purpose of scientific research, it can justifiably be considered separately since it can be the result both of an inductive process and of a deductive process, as we have already had occasion to point out.

Moreover we shall begin with some remarks on definition of terms and on observation, and close with some other remarks on explanation, prediction and application of laws — all phases of scientific research which, when referred to collective phenomena, need special caution.

For our purpose we shall then consider the following phases of logical processes: 1) Definition of terms; 2) Observation; 3) Induction; 4) Hypotheses; 5) Symptomatology; 6) Formulation of laws; 7) Quantification and precise definition of laws; 8) Generalization of laws; 9) Deduction; 10) Verification; 11) Explanation; 12) Prediction; 13) Application of laws.

6.1. Definition of terms

The definition of terms is an indispensable condition for fruitful scientific research. "Half the disagreements between scholars", said Leibnitz — and in my opinion he did not exaggerate — "depends on not having exactly defined the terms". This may be said for statistical as well as for non-statistical research. But in Statistics misunderstandings about the significance of terms are easier, and from these misunderstandings has arisen the false but widespread impression that with Statistics it is possible to demonstrate the most varied theses.

Speaking of a phenomenon, we may think of it as it actually appears to us in the particular circumstances of place and time in which it occurs, or, on the other hand, in a hypothetical condition in which the influence of certain circumstances, which we judge to perturb the phenomenon in question, is eliminated.

For example, when we speak of the high or low stature of an individual we may understand his actual stature, in which case we would say that the stature of an infant, developed though he may be for his age, is lower than that of an adult, even if he is a dwarf. But we may also be interested in stature as an index of the capacity to grow and then eliminate the influence of age; we consequently correct the actual value observed in such a way as to eliminate the age influence: in this case we say that stature is standardized for age. Standardization can be made for every one of the factors that contribute to the determination of the phenomenon, as well as for a combination of them, and, as collective phenomena depend on a number of factors much more numerous than those of individual phenomena, standardization can be made in many more ways for statistical than for non-statistical phenomena. Hence the consequence that the different meanings that can be given to the terms used in statistical

research are much more numerous than in other types of research; hence the greater facility for misunderstandings and hence the need that in Statistics special attention be paid to exact definition of terms. For example, when we compare the death-rate of two countries, we may be interested in its actual level, given the conditions of place and time in which the two populations live and the composition by age, sex, occupation, etc. that they actually present. We may, however, be interested, on the contrary, in the biological vitality of the two peoples and in that case we should compare the mortality of the two populations in the same conditions of age composition; and, in point of fact, in such comparisons the populations are usually standardized for age; but we may be equally interested, in keeping with the nature of the research, in eliminating the influence of sex also, or, and of occupation, or/and of climate, or/and of wealth, etc. Now it is quite possible that the measurements of mortality obtained by different researchers are different according to whether standardization is or is not made, and, if it is made, according to whether it is made for one or for another, or for some or some other factors. If the researchers have not clearly defined the terms, the public will receive the impression that they arrive, from the same data, at different and perhaps contradictory conclusions and will be strengthened in the conviction that with Statistics it is possible to demonstrate any thesis whatever.

6.2. Observation.

Observation presents special difficulties and dangers.

Naturally it cannot be limited to one case or to a few cases, but must comprise a mass of cases.

The need for considering a sufficiently large number of cases can become a serious obstacle when it is no longer a question of computing a frequency ratio (such as that of the sexes at birth), but a law of distribution (like that of statures) or a law of correlation (like that existing between weight and stature). While for a frequency ratio the observation of a group of cases is sufficient, for a law of distribution or of correlation, the observation of a series of groups is necessary, each of which must comprise a suffi-

cient number of cases. This condition is not always easy to realize for the extreme groups (for example, for the groups of very low and very high statures). Even when the number of cases in the intermediate groups is sufficiently large, it may happen that the extreme groups are so insufficient that they leave doubts whether the irregularities observed are significant or accidental.

It is necessary to call attention to the fact that, when a law and especially a statistical law, has to be established, there are sometimes exceptions which may only be apparent : sometimes the exceptions are therefore kept on one side while new observations are awaited, before considering them as valid proof of the negation of the law that they seem to contradict. Thus, for example, one should have been prudent about the supposed excess of female births found among the colored population of South Africa, which was not subsequently confirmed and which was probably due to an inversion of the columns in the transcription of the data ; and about a similar excess in Greenland, which was found to be due to the too restricted number of observations. Causes of error of the first type (errors of reference) are common to collective and non-collective phenomena ; those of the second type (restricted number of observations) are peculiar to collective phenomena.

The problem of judging when the number of observations is sufficiently large for the results obtained to be considered reliable for a larger mass or for the universe, is a specific problem of Statistics, since Statistics is, as we have defined it (see Chapter I), the appropriate technique for the treatment of phenomena which manifest themselves only in a mass of observations. And it is not always a problem which is easy to solve.

The calculus of probability shows what is the probability of committing an accidental error of frequency of a given intensity, but the judgement of the intensity of the error which is tolerable is left to the statistician who must take account of the nature and of the purpose of the research.

Moreover, the applications of the calculus of probability involve hypothetical schemes which may or may not correspond to the reality. The usual scheme is the Bernoullian, according to which the probability of single observations is constant and

independent of each other. But this is not always the case; frequently the successive events or the simultaneous events are mutually dependent to a greater or lesser degree, with solidary or, on the contrary, compensatory tendency and very often the probability does not remain constant, so that, by including in the research new cases, the probable accidental error is reduced according to the rules shown by the calculus of probability, but a systematic error is introduced which not always, and, in any case, only on certain hypotheses, can be measured.

From the practical point of view, however, the problem often has no importance, either because it is evident that the mass of the observations is amply sufficient to authorise a conclusion with the required reliability, as is usually the case for conclusions based on the amount of the population obtained by census, or, on the contrary, it is evident that the number of observations is too scanty to support or invalidate any conclusion ; thus the sex ratio observed in a sibship of two children is insufficient to judge of the tendency of the parents to procreate boys or girls.

Moreover it must be borne in mind that the limited number of observations is a disturbing circumstance only in so far as we have in view conclusions which surpass the cases observed. Thus for the recruitment offices of the army or for the fiscal agencies what is important in the real amount of country's population or wealth, independently of the fact that it may have been influenced by accidental factors ; for the present economy of the above family of two children, what is important is their sex independently of the fact that, should the parents have had more children, the sex ratio would be different.

Less decisive is the help that the calculus of probability can give in measuring accidental errors of dimension, as, while the knowledge of the mean frequency is sufficient for determining the probability of an accidental error of frequency, the knowledge of the mean dimension is not sufficient for calculating the probability of an accidental error of dimension.

And it is even less important, although sometimes useful, in evaluating and correcting systematic errors.

The fact that statistical data concern collective phenomena, which involve a mass of observations of individual phenomena of different intensity, opens the way to possible biases depending

on the different frequency with which the individual phenomena are observed. Such biases are not always easy to discover and only in special cases can they be corrected. In any case here is a dangerous field in which it is necessary to be an experienced statistician in order to move freely.

The topics of accidental errors — both of frequency and of dimension — and of systematic errors or biases have been treated in Chapter XIII.

The ideal that a statistical survey should observe all the cases, and the more the cases the better, has been for a long time considered as a dogma.

This dogma now has lost its validity, and it is generally admitted that in some cases a sampling of the cases may be preferable. " In some cases ", however, not always; in many other cases the sampling represents only a *pis aller*, as we have seen in Chapter XVI.

It is not the only example of a device or custom which, adopted initially for the sake of its simplicity, under the pressure of the scarcity of financial means or of the material difficulty of following the traditional procedure, has been recognized as presenting advantages which have lead to its adoption also when the traditional procedure would be possible: this happened in the case of the jacket and the girdle belt substituted by the American colonists for the long cloth and the braces; this happened in the case of the wall decoration of the rooms adopted by the military offices during the world war as a substitute for paper or fabric.

There is in such cases the tendency for the " Ersatz " procedure, when used by people of importance, to become fashionable and acquire wider spread than it deserves.

When we discuss the sampling adopted by statistics, we must consider that it is only a rational presentation of a process that inconsciously is followed in practice in all our observations and on which we base our experience. If we reflect on the number of cases on which we base our knowledge of Italians and French, of Occidentals and Orientals, of men and women, of children and adults, and so on, we realize the terrifying facility of our judgements.

Passing to another point, it should be borne in mind that the

processes which exposed to the least error in individual cases, can lead to inadmissible conclusions for collective cases. Thus, many people asked to fill the individual questionaries and wishing not to leave any question unanswered, declare, when the answer is not known, the usual attribute, and so in a sea-side place, when the occupation of the person is unknown, he is declared as a fisherman ; in an anthropological survey, when the hair color is unknown, it is described as dark or chestnut or grey according to the color prevalent in the population. Naturally this leads to a quite misleading frequency of the various characteristics of the population.

A similar drawback is presented — as we have seen — by the measurement of the reliability of the test of significance applied by modern statisticians to individual cases (see Chapter XV. 4).

This offers us an opportunity for considering the elaboration of data. As a matter of fact, when, in logic, we speak of " observation ", we understand, not only the survey of the cases, but also the elaboration and presentation of the data. Obviously the methods followed in all these stages are important and all may be more or less accurate ; the technique however may be very different according to the nature of the phenomena considered and the aim of the research. It is very different for individual phenomena and collective phenomena. Statistics is precisely the special technique suited for the observation of the collective phenomena. For the same research, several statistical methods are often possible ; the accuracy of the methods is obviously a quality which may be decisive for the choice, but it is not always the only quality of which account must be taken and sometimes it is not even the most important. Theoretical simplicity and ease of application must also be considered. But the most important is obviously the conformity of the method to the purpose of the research. Similarly for the traveller it is important to take the train which is more punctual but it is far more important to take the train which leads to his destination. Thus different methods in the elaboration of statistical data should be adopted according to the purpose of the research. To this exigency not always sufficient attention is paid by modern statisticians. The Italian school has considered one of its tasks to introduce new procedures (e.g. mean difference, indexes of concentration, of transvariation, of

attraction, of connection, of dissimilarity etc.) which are specifically suited for the measurement of special aspects of statistical phenomena (1).

6.3. Induction.

It has already been said that *induction* can be *complete* or *incomplete.*

A) *Complete induction.* One of the characteristics to be recommended in many statistical surveys is their generality; they must, that is to say, cover all the cases of the phenomenon studied. Censuses, returns of marriages, births, deaths and most other official statistics have the characteristic of allowing the establishment, for such phenomena, of laws based on complete induction.

A constantly higher average age of marriage for men than for women in all the Italian Communes during a certain epoch is, for example, a law that can be established by complete induction, since we can determine the intensity of the phenomenon in question for both the sexes for a sufficient number of cases in every Commune.

The generality of statistical surveys is thus a circumstance which favours the application of complete induction to collective phenomena.

B) *Incomplete induction.* Complete induction is possible only for " closed phenomena ", that is to say, for phenomena where no more cases will happen in the future.

For those phenomena that we shall call — in contra-distinction to "closed" — "open phenomena", only incomplete induction is possible and recourse must be had to it, moreover, in all cases in which it is not possible to examine all the cases of a closed phenomenon.

---

(1) The characteristics of the Italian school are outlined in the lecture *The contributions of Italy to modern Statistical methods,* given at the London School of Economics and published in the " Journal of the Royal Statistical Society ", London, 1926. A more recent (but obviously not up to date) statement is contained in the work *I contributi italiani al progresso della Statistica* by C. Gini, G. Pietra, F. Paglino, P. Fortunati, G. Ferrari and A. De Polzer, in the publication *Un secolo di progresso scientifico :* (1839-1939) by the Italian Society for the Advancement of Sciences, Rome, 1939.

a) *Incomplete induction of causality relationships* can be based, as has been seen, on the methods of concordances and of differences.

When we observe that a certain relationship between two or more phenomena happens a large number of times in different circumstances, we are led to believe that it will also happen in the future, implicitly making the hypothesis that *all* the said circumstances were different ; we apply, that is to say, the method of concordances.

When we classify a phenomenon according to several characteristics (for example, stature according to age, sex, occupation etc.) and we observe that the phenomenon varies regularly according to one of these circumstances (for example, age), all the others (sex, occupation etc.) remaining the same, we are led to believe that between the phenomenon examined and the circumstance with which it is related there is a causality relationship, implicitly making the hypothesis that we have eliminated the influence of *all* the other circumstances that could exercise it ; we apply, that is to say, the method of differences.

We have seen that, in theory, there is foundation for method of differences but not for that of concordances, although the probability of an error decreases with the increase of the number of cases in which the circumstance is observed. In practice, nevertheless — as has also been said — it is difficult, in the application of the method of differences, to be certain of having made equal all the circumstances different from the one which we wish to isolate, and it is even more difficult, in the application of the method of concordances, to be able to exclude the possibility that, among the circumstances in which the relationship between the phenomena has been orbserved, there is none which is common to all the cases considered ; now such a difficulty is much greater for collective phenomena, which have the characteristic of depending on a large number of circumstances.

Let us now give some examples of errors which have been committed or into which it is possible to fall.

The average weight of babies at birth increases with the increasing age of the mother, given the same occupation, social category etc. It was therefore thought possible to establish a causality relationship between the two phenomena and to consider the mother's age — the antecedent phenomenon — as the

cause. However, the influence of the order of generation had not been eliminated ; further research showed that, with equal order of generation, the influence of the mother's age practically disappears, while, with equal age of the mother, the weight of babies at birth increases with the increasing order of generation.

This example refers to the method of differences ; let us now consider one relating to the method of concordances.

It was found that the distribution of individual or family incomes presents a certain uniformity in countries which differ in average income, political regime, economic organization, race etc., and it was concluded that the distribution of incomes depends on the distribution of individual capacities, which is to be presumed uniform in all countries. But it was subsequently pointed out that there were other characters common to the various countries considered ; the system of inheritance and the differential reproductivity of individuals belonging to different income groups.

In this case, a more correct application of the method of concordances has not excluded the causality relationship previouly reached, but has demonstrated its insufficiency by completing it with the consideration of concauses.

Even in experiments it is not easy to obtain an absolute equality of circumstances apart from those of which the effects must be isolated by means of the method of differences. This is particularly true in agrarian experiments because of the difficulty of finding absolutely identical plots of ground. In this case, the experiment is repeated on different plots, chosen so that the differences that they present compensate one another and then the mean of the results is taken. One cannot, however, estimate the compensation without basing oneself on hypotheses, such, for example, as the linearity of the variations of the disturbing circumstances and the cumulative nature of the effects.

In the application of the method of differences to observations classified according to multiple combinations of circumstances of which the influence must be eliminated, a drawback which is often met is the small number of cases in some classes of combined circumstances, so that the accidental disturbances can mask the influence of the circumstance which must be brought to light.

Methods of elimination (standard population or standard coefficients etc.) enable synthetic results to be reached in such cases and show how the phenomena examined would vary as a function of the circumstance considered, if the other circumstances were not equal but presented the same frequency. These methods too, however, imply hypotheses that we indicated when we spoke of the comparison of data (Chapter XVII).

A similar result is reached by means of the method of partial correlation, by which one can determine — but on still more restrictive hypotheses — the variation that the phenomena under examination would present as a function of the circumstances of which the influence must be isolated, if all the other circumstances presented a constant intensity corresponding to the mean intensity.

When there are very many circumstances apart from the one whose influence it is desired to isolate by the method of differences, it becomes impossible to identify them all or even the great majority, and to eliminate their effects by means of the processes of the standard population, of standard coefficients or of partial correlations. The circumstances are then very often considered as accidental in relation to the circumstance to be isolated and it is admitted that their disturbing influences neutralise one another on the basis of the so-called principle of compensation of accidental errors. This is particularly the case for collective phenomena, so that such a process is generally called the *statistical method* as opposed to the *experimental method*. Both would be particular cases of the *method of differences* with the difference that in the experimental method it is admitted that all the other circumstances except that whose influence it is desired to show, are made constant by means of the experiment, while in the statistical method it is admitted that all the influences of disturbing circumstances neutralise one another in their effects, allowing the influence of the circumstance, which is to be isolated, to emerge unaltered. This contra-distinction is, in reality, too rigid since very often in experiments as well, all the circumstances cannot be made equal and recourse is therefore had to statistics for the purpose of eliminating the influence of the residual circumstances ; but it can be maintained if one speaks of *pure statistical method* and *pure experimental method*.

It is important to observe that, if the disturbing circumstances of an accidental character by definition compensate one another, it is not said that their effects also compensate one another, as we pointed out previously (see Chapter XIII). Nor is it always the case that the disturbing circumstances are all of an accidental nature and not of a systematic nature. For example, in studying the variations of stature according to altitude, it cannot be said that the average stature of a population that lives at a certain altitude would be the same if the food, physical exercise, income, instead of being different from individual to individual, were, for all the individuals of the group, the same and exactly equal to their respective means. On the other hand, average food, average income and average physical exercice are not necessarily the same at all altitudes, but can present systematic variations which would have to be eliminated by other methods, for example, by the method of partial correlations.

Finally, even admitting that the mean of the statures of persons having different incomes were equal to the stature of persons with the average income and that the average income did not vary with altitude, and that the same could be said for each of the other circumstances (food, physical exercise etc.), it remains to be seen how the effects of these circumstances acting simultaneously would combine with one another. If they possess an additive property, the mean of the effects of the various circumstances will correspond to the effects of their mean, but, if, on the contrary, this does not happen and, for example, the effect of the most unfavourable circumstance prevails in the combination, the correspondence no longer exists. This is true in the case of agricultural products. The influences of unfavourable factors are not always compensated by those of favoutable factors. Temperature, rainfall, preparation of the ground, may have been extremely favourable during an agrarian cycle, but this does not compensate for the damage produced by an invasion of locusts or by a devastating hail storm. Therefore the average product of agriculture is less than the product, called normal, that would be obtained if all the factors were present to a normal degree.

The methods of differences and of concordances, even when correctly applied, only allow us to establish causality rela-

tionships but do not allow us to decide which is cause and which is effect. When we are in a position to establish that one of the two circumstances precedes the other, the decision is easy but that does not always happen, in particular for collective phenomena, the mechanisms of which are often complicated and the interdependences of factors are frequent and sometimes continued. A celebrated example of confusion between cause and effect was that of the mercantilist school which — having observed a concordance between wealth and quantity of money — concluded therefrom that money is the cause of wealth, while it is only its effect, while wealth in its turn depends on diverse causes or on their combinations, as we have already had occasion to mention.

b) *Incomplete induction of correspondence relationships* also merits some attention.

It has already been said that, in view of the practical difficulty that is often encountered (especially in collective phenomena) of taking into consideration all the circumstances whose identity (for the application of the method of differences) or, on the contrary, the diversity (for that of the method of concordances) should be garanteed, recourse is had, whenever possible, to the multiplication of observations or of experiments. (see pages 30, 33 and 34).

It is thus possible to exclude — with increasing probability as the number of experiments or observations increases — on the one hand, fortuitous coincidences and, on the other, the possibility that the relationship observed depends on co-effects rather than on a direct causality relationship. In the same way, the conclusion may be favoured that an induced cause is a necessary and sufficient cause rather than a necessary or suppletive or only possible concause.

It must now be pointed out that the multiplication of the observations or of the experiments is much more effective for the exclusion of fortuitous circumstances than for the exclusion of systematic relationship different from necessary and sufficient causality.

In the method of concordances, the multiplication of the observations and of the experiments is, moreover, necessary in

order to exclude — although always with a higher a lower probability, but never with certainty — that the two circumstances, for which the concordance happens, depend on different causes.

It should also be recalled that, with the exception of the case of the dynamic application of the method of differences, it often remains to be decided — even after the multiplication of the observations or experiments — which of the two circumstances is the cause and which the effect.

If follows therefrom that we often have a relationship established on the basis of a large number of observations or experiments relating to collective phenomena, for which a fortuitous coincidence can be excluded but it is not, on the contrary, possible to decide whether it is a question of necessary and sufflcient or only necessary or only sufficient, causality relationship or of a possible concomitant cause, nor to establish which is the cause and which the effect, nor to exclude the possibility that the two circumstances are both co-effects of another circumstance.

Our confidence in the uniformity of the natural processes, which is rooted in our psychology, leads us to consider as a law the relationship that we have observed in a large number of observations : without worrying about the causality link, we consider it as a law of correspondence. The laws of correspondence are thus, for the most part, established empirically.

Very often, in view of the much greater importance of a causality law compared with a law of correspondence, we subsequently seek, on the basis of other, a priori or a posteriori, knowledge, if, among the circumstances between which a relationship of correspondence has been established, we are justified in admitting a relationship of causality. It may be said that the majority of the laws of causality relating to collective phenomena are established by this process rather than by the direct application of the method of differences or of concordances, since, in practice, the attempt is hardly ever made to take into consideration all the circumstances — so numerous are these — different from those amongst which the establishment of the relationship is sought.

Certain relationships and uncertain relationships. The searcn for laws of causality, which aim at identifying necessary and suffi-

cient causes, as also the search for laws of correspondence has as its purpose the determination of relationships valid for all cases. This has, without doubt, been the fundamental purpose of scientific research for a long time.

Little by little however, the conviction has grown that, alongside these relationships, which we can call *certain*, there are others, which may be called *uncertain* and which happen only in a larger or smaller fraction of cases. The importance of the latter has been more and more widely recognised, so that today they perhaps represent the essential purpose of scientific research.

The fact, recognised for a long time, that the same effect can be produced by a number of causes and the consequent concept of suffcient, but not necessary cause (see pages 21-24) imply a correspondence between the cause in question and the effect in only a part of the cases in which the effect is present. If a street can become wet because of rain or of watering or of a broken water pipe, only a part of the wet streets will correspond to fallen rain.

On the other hand, the fact, also recognised for a long time, that there are necessary, but not sufficient, causes leads to a correspondence of the effect to the cause in question only in a part of the cases in which the said cause is present. If the presence of the pneumococcus in the lungs is a necessary, but not sufficient, cause of pneumonia, in only a part of the individuals in whose lungs the pneumococcus is found will pneumonia develop.

We have spoken in this case of necessary concauses, which we have distinguished from suppletive and from possible concauses.

In order that pneumonia may develop, as well as the presence of the pneumococcus, a concomitant cause is necessary such as a trauma or a sudden change of temperature or an organic weakness etc. These are suppletive concauses; one of them must be present — as well as the pneumococcus — in order that the effect, pneumonia, may happen; but any one of them can be present. Not only, in this case, does a part of the traumas or of the sudden variations of temperature correspond to a case of pneumonia, but also, only a part of the cases of pneumonia corresponds to a trauma, while another part corresponds to a sudden change of temperature or to an organic weak-

ness or to some other unfavourable circumstance. In the case of suppletive concauses, only to a part of the cases in which the effect happens does the concause correspond, and only to a part of the cases in which the concause is present does the effect correspond.

The same may be said in relation to possible concauses.

We have also put in evidence that the same concauses can produce different effects — which we have called di-effects — according to the other circumstances with which they are concomitant.

There is then only partial correspondence between the presence of the concause and the different effects that derive from it. Thus the presence of the pneumococcus determines pneumonia in only a part of the cases, in others it does not. The occurrence of a trauma can determine a simple congestion, for example, or pneumonia.

In all the cases reviewed, the uncertain relationship can be considered as a probability relationship. What is — we said — the probability that to the effect corresponds a certain sufficient, but not necessary, cause or a certain suppletive or possible concause ? What is the probability that to a certain necessary or suppletive or possible concause corresponds the effect ? What is the probability that to the presence of a concause corresponds one of its possible di-effects ?

Up to now we have spoken of uncertain causality relationships but we can similarly speak of uncertain correspondence relationships.

These can in the first place concern relationships existing between variable and function. As a matter of fact, the functions are distinguished according to whether they are univocal, biunivocal, plurivocal or biplurivocal ; except for the biunivocal, they can give rise to partial correspondences between the individual values of the variable and of the function, so that problems of probability similar to those for causality relationships, can also be posed for correspondence relationships.

Problems of probability always imply a plurality of cases but they can concern two categories of phenomena : those of which we know the mechanism of the causes or the correspondence relationships — so that it is possible to determine a priori the probability relationships that refer to them without having

recourse to statistical surveys — and it is to phenomena of such a nature that until now we have mainly referred ; and those for which, on the contrary, the causal mechanism or the correspondence relationships are so complex that the scientist has to renounce the possibility of identifying all the causes or all the relationships and, having identified some, must attribute the residual variations to accidental factors, and in fact these phenomena can only be studied by means of statistical surveys. Such are indeed collective phenomena, for which uncertain relationships assume essential importance.

Uncertain relationships are of a very different character from certain relationships and from what has been said it derives that the function of Statistics is different in the case of the former from that of the latter.

There may be certain relationships between individual phenomena and between phenomena of which at least one is collective. In the latter case, they fall within the sphere of Statistics, which has the task of measuring the collective phenomena between which certain relationships are established.

Also, uncertain relationships may exist between individual and collective phenomena, but the function of Statistics is more important for the latter, since it has the task of determining the relationships themselves.

Amongst the various chapters of statistical methodology, those which are concerned with means, statistical ratios and relationships between distributions have particular reference to certain relationships ; those which deal with probabilities and statistical distributions and correlations have particular reference to uncertain relationships.

In the case of the second species of relationships, as in that of the first, it is necessary, after having determined the relationships, to establish its uniformity in order to be able to speak of a law.

Here too, we can have recourse to complete induction, as, for example, when we establish the higher probability of a male than of a female birth. Nor is the possibility to be excluded that a causality link may be established by recourse to the methods of concordances or of difference. But, more often, the observations will be multiplied as much as possible in order to establish a rela-

tionship of correspondence from which we shall attempt to return to the causes on the basis of knowledge drawn from other sources. In this way, for example, a correlation has been established between the characteristics of parents and of children, which, subsequently, has been explained by the laws of hereditary and environmental influence, and has thus taken the character of a law of causality.

We have already mentioned the reasons for which causality relationships are not invertible : all the more so are probability relationships not invertible.

The inversion of statistical relationships implies problems which were discussed in the relevant chapters (see Chapters XIII and XV) and to which we shall return when speaking of statistical laws (see page 58).

6.4. Hypotheses.

In view of the complexity of collective phenomena, hypotheses simplifying their structure are often necessary. This is the case for the hypothesis of the continuity of data which are really discontinuous (such as the number of families according to the number of children), for the hypotheses which are at the basis of interpolatory and extrapolatory processes, for the hypothesis of the equiprobability of causes in the determination of probabilities a posteriori, for the hypotheses of the additivity of effects, of the linearity of correlation, of the mutual independence of certain phenomena in the methods of elimination (as the independence of prices and quantities in the determination of the index numbers of the purchasing power of money), for the hypothesis of the arithmetical or geometrical increase of the population for determining its amount in the interval between two censuses, etc.

In other cases, the hypothesis becomes necessary as a result of the rough statistical classification : we are then obliged to suppose that all the values which fall within a class are equal to the semi-sum of the extremes of the class or that they are distributed within the said class uniformly or according to another law which should be as simple as possible.

The above hypotheses are all arbitrary or unreal ; we accept them, however, since we suppose that they do not lead to material errors. Sometimes it is possible to calculate the lower and

upper limits of the value required (as in the calculation of index numbers of the purchasing power of money) ; in other cases, one or other of these limits can be calculated ; in still other cases, we can only demonstrate the direction of error and give an idea of its bearing having recourse to less restrictive hypotheses whenever our knowledge of the phenomenon allows it (as it has been made in the determination of the probability, a posteriori, based on the hypothesis on the equi-probability of causes, having recourse to Gini's wider hypothesis on the distribution of such causes).

In every case, it is necessary to take account of the explicit or implicit hypotheses that we make, to point them out and to mention that the conclusions can be accepted only as hypothetical or approximate results, and to determine, when possible, the sense and the extent of the approximation. This is one of the fundamental points of statistical methodology, unfortunately frequently neglected by modern statisticians, on which I have frequently insisted in my lectures and writings.

Now to identify the hypotheses and then to mention them is always possible. But it is not always possible to realize the sense of the approximation thus determined, as this may be sometime in one direction and sometime in another, as we have seen in the case of the hypothesis of the equi-probability of causes in the inversion of Bernoulli's theorem. Other times the direction of the approximation is known but not its extent, as for the hypotheses of the additive effects in the analysis of variance. A frequent misunderstanding in statistical applications is that of exchanging sufficiency with the necessity of hypotheses or system of hypothesis. Given the complication of the causes of the collective phenomena, often there is no difficulty in suggesting a sufficient system of hypotheses, *i.e.* a possible explanation of the phenomenon but to find the necessary system of hypothesis which leads to the true explanation of the phenomenon is much more difficult. Here is the danger of the procedure of theoretical schemes or models. We have seen that the models of Quetelet for explaining the normal distribution of anthropometric characters, as also the model of Lexis for explaining the paranormal dispersion of the human births sex-ratio, prooved to be unfounded. In other cases, the hypotheses are sufficient for the realisation

of a relation valid for the mean or the overall values but erroneous if applied to individual values, as we have seen when treating the inversions of statistical relationships (see Chapters XIII and XV). Even some first rank statisticians and mathematicians, who have made important contributions to statistical methodology, do not distinguish properly the two procedures.

6.5. Symptomatology.

There are causes that do not present themselves with evidence at least in the first phase of their presence, while it is of great importance to take account of their action as soon as possible, in order to take advantage of them if they are favourable, to eliminate them if they are unfavourable.

The presence of a cause may however be revealed to the expert's eye through the *syptoms* that accompany it. The conclusion is sometimes rendered uncertain by the fact that the symptom is not present all the times, but only more or less frequently, and also by the fact that different causes can give rise to the same symptom. This is so in the case of illnesses : the diagnosis of the illness then represents a problem of a posteriori probability which depends on the frequency of the various illnesses and on the frequency with which each illness presents the various symptoms. The relationships between cause and symptom can in such a case be considered of the second species.

In other cases, the presence of a cause is always or usually preceded by *forewarnig* or *premonitory indications* which can only be perceived by statistical research. Economic crises (at least in many cases) are preceded, for example, by an increase in the rate of circulation of money. Here, the research consists above all in the discovery of such indications and in the determination of the interval after which the action of the cause is to be expected. A special branch of Economics, *Economic Semeiotics*, has been constituted for such a purpose and in several countries *economic barometers* have been constructed and applied, not always, it is true, with great success. To the failures, certainly, the unforeseen intervention of political agencies greatly contributed; and their growing interference in the economic market, very difficult to forecast in its measure and in its bearing, discouraged the development of researches.

When the cause or premonitory indication or both are collective phenomena, the relationships between one and the other may be considered as of the first species, while the interval which separates them, since it is variable, gives rise to relationships of the second species.

In the preceding case, Statistics serves to indicate or even to predict the presence of a given cause.

In other cases, it can only suggest the presence of a cause which is added to those which were already active or which we have considered in a theoretical scheme.

A sudden contraction of the imports of a country suggests the presence of obstacles which subsequent research may locate : it may be a question of physical obstacles (such as a state of war in the exporting countries) or, on the contrary, of economic obstacles (such as an increase of customs tariffs).

The divergence between the effect observed and the predictions made on the basis of a certain scheme that has proved normally to correspond to reality, suggests the presence of a cause not considered in the scheme, a cause which — according to the cases — may be disturbing or regularising.

If, for example, the ratio of the sexes in human births presents a variation much greater than that to be expected on the basis of the scheme approximately valid in most cases of the normal dispersion, as happened towards the end of, and immediately after, the first world war, it can be attributed to a special circumstance which, however, (as in the case cited), is not always easy to identify.

In other cases, on the contrary, an exceptional regularity shows the presence of a regulating cause, as happened for the ratio of the sexes among the still-born published in the statistics of a european State, a ratio which showed a smaller dispersion than the normal. Here, the cause was brought to light ; the data were not the results of a survey, but had been obtained by supposing that the number of stillborn of each sex varied proportionally to the total number of births of the same sex.

Let us give others examples. A divergence of the curve of concentration of incomes in a German State from its normal form suggested the existence of an error in the official data, which was recognised by the office compiling them and, likewise,

an anomaly in the curve of concentration of the population of Spanish municipalities brought to light a printing error in the data published by the Central Statistical Office.

The problem has been posed whether the various terms of a formula which satisfactorily represents the distribution or the variation of a certain phenomenon can be regarded as corresponding to different groups of causes. The fact that the same phenomenon can be represented by different formulae (and sometimes with a roughly equal degree of approximation) demonstrates that the reply must be negative. The formula can nevertheless suggest research in order to find out whether its various terms correspond to different causes, but such correspondence only represents a hypothesis of which the closeness to reality must be demonstrated by other arguments or data.

6.6. Formulation of laws.

6.6.1. — *Statistical laws of the first type.* In various quarters the opinion has been expressed in the past that there are substantial differences between statistical laws and those that are called natural or physical laws.

It was, above all, the laws of the first type, which were meant, i. e. those which express constant relationships between two categories of phenomena, at least one of which is of a collective character.

It has been said that statistical laws are valid only for the mass or the mean of the phenomena, but not for individual phenomena. It is easy to reply that, in all the branches of science the laws are valid for the category of phenomena studied; physical and chemical laws relating to atoms and molecules, biological laws to cells and organisms, social laws to society and statistical laws to collective phenomena. It would be out of place to demand from statistical laws validity for individual phenomena, just as it would to demand validity for atoms from biological laws.

It has also been affirmed that statistical laws are not valid for all times and all places, as is the case, on the contrary, for natural laws. If, by this, is meant that a temporal and spatial limitation is a frequent characteristic of statistical laws, the observation is well-founded, but it would be erroneous to erect it

into a difference of principle. The fact that many physical laws are now considered as statistical laws shows that the contrast is not valid in a general sense. And, even apart from physical laws, there are statistical laws which have general validity such as that of regression. On the other hand, it is not said that the concept of law implies its validity for all times and all places, as we have already pointed out (see pages 16-17): the concept of law naturally derives from juridical law, which is limited by the frontiers of the State. And even in the case of physical laws, there are probably many that are valid only for our planet.

Another contrast between the statistical and other natural laws is said to consist in the fact that the former are empirical and the latter are, on the contrary, theoretically demonstrated. Now, we do not see how the fact of having theoretically demonstrated a constant relationship between two categories of phenomena can change the character of this relationship. From the historical point of view it is to be remembered that many physical laws were first empirically established and only subsequently explained theoretically: this is so for Kepler's laws. On the other hand, there are statistical laws, such as the Gaussian law of the distribution of characters, the law of regression in heredity, the law of distribution of incomes, which more or less successfully, have also been explained theoretically (see pages 4-5).

In the fourth place, it has been maintained that statistical laws are always approximate, while physical laws are said to be exact. Nevertheless, in reality, there are many physical laws that are approximate: e.g.; the law of Boyle-Mariotte and even Newton's law of universal gravitation in the case of small distances. Moreover, all physical laws which have a statistical character are said to be approximate, although it must be recognised that for them the approximation is better than for statistical laws relating to biological and social phenomena in general. It must also be recognised that, in view of the complexity of collective phenomena, statistical laws are approximate more often and to a greater degree than are laws relating to individual phenomena. Consequently it sometimes happens that the same statistical relationship can be expressed by different formulae,

such as the ratio between stature and weight, for which Quetelet had formulated the law according to which weight varies as a function of the square of the variation of the stature, whereas Gini has shown that a linear relationship gives approximations of the same degree for the same data and has a more general validity, a demonstration which has protected Quetelet's theory of the average man from the criticisms which had been directed at it and which had wrongly been accepted as decisive.

An important characteristic of statistical laws, even of those which only express correspondence relationships, is constituted by the fact that they are often not invertible. If the attraction of the celestial bodies varies according to a certain function of their mass, their mass varies according to the inverse function of the attraction. On the contrary, if the average age of the bridegroom varies according to a certain function of the age of the bride, the average age of the bride does not vary according to the inverse function of the age of the bridegroom. This depends on the fact that the two lines of regression do not coincide and this, in its turn, depends on the fact that to a certain age of one of the marriage partners correspond different ages of the other marriage partner ; in other words, it depends on the dispersion presented by the correlation between the ages of the two partners. It is a different way of saying that the age of one marriage partner corresponding to a certain age of the other partner, is a collective phenomenon ; which demonstrates that the non-invertibility of statistical relationships is inevitably connected with the collective character of statistical phenomena.

If we go to the root of the question, we find that, in its turn, this derives from the fact that the said phenomena depend on a number of circumstances other than that whose influence we are examining. We can often eliminate some of these other circumstances : for example, we can eliminate from the average age of one partner corresponding to a certain age of the other marriage partner the influence of the longer or shorter period of education, of the occupational condition, of wealth etc., but, all these circumstances being equal, there will always remain a certain variability or dispersion of the ages of one partner corresponding to the same age of the other partner.

It is necessary to add that we cannot exclude the possibility

that, among the circumstances which we do not succeed in eliminating, there are some which have a systematic influence on the age of the bridegroom or of the bride, so that the relationship that we establish between the two ages is not a direct causality relationship but depends, in whole or in part, on this common cause. The fact is that it is specially difficult, in the field of collective phenomena, to establish causality relationships which make all the circumstances equal, with the exception of one, in conformity with the method of differences.

In practice, correspondence relationships are established, and the fact that such relationships are not always distinguishable and often not distinguished from true causality relationships, together with the fact that, according to the available data, one often eliminates the influences of different circumstances or those of different number and importance, is often the source of more or less inexact and contradictory assertions. From this arises the conviction, rooted in certain sections of the public and of which we have already spoken (see pages 36-37), that by means of Statistics you can demonstrate whatever you want to demonstrate.

Let us imagine two populations A and B of different race. Population A has a general death-rate decidedly above that of B ; there are people who draw the conclusion therefrom that race B has a superior vitality to that of race A. But a less superficial statistician will observe that the age-composition is different in the two populations and that, by eliminating such circumstance, the death-rate becomes roughly equal in the two populations. Race — he concludes therefore — has no influence. But a third statistician, who also has available the classification of the population according to occupation is in a position to demonstrate that, if this circumstance is also eliminated, mortality becomes higher in B: race A — he affirms — is really more vital and neither less vital than race B nor only equally vital. A fourth statistician may also be able to eliminate other circumstances (for example, climate and wealth) and arrive at a conclusion which approaches the first, that is to say, that the death-rate — all such circumstances considered : age, occupation, climate, wealth, being equal — is higher in A than in B. The public concludes therefrom that by means of Statistics contradictory theses can be demonstrated. In reality, Statistics demonstrates nothing ; it only establishes

correspondence relationships and the different statisticians in question have established relationships of correspondence between different phenomena : the one between the two populations as they appear concretely, the second between the two populations with equal age-composition, the third, also with equal occupational composition and, finally, the fourth with equal climate and wealth as well. But, in all the cases, it is a question of correspondence relationships, and Statistics, which has established them, is not making mistakes ; the error arises when the correspondence relationship is interpreted as a causality relationship on the supposition of having equalised all the circumstances with the exception of race. The error consists in applying the method of differences when the necessary conditions do not exist ; it is an error which is often made for individual phenomena, but which is even easier to commit in the case of collective phenomena, in view of the multiplicity of circumstances on which they depend.

It must also be remembered that the processes for the elimination of the influence of certain factors, for the purpose of isolating that of another particular factor, are numerous and based on hypotheses which are more or less restrictive and diverse for the different processes, so that the results are not sure but subordinate to such hypotheses. Moreover, when two or more processes are applied to the same data, they can also lead to more or less widely diverging conclusions.

It must also be remembered that it is possible that one of the circumstances between which a law has been established is, with regard to the other, in the relation of a part to the whole, thus determining a correspondence relationship which may diminish or even conceal the causality relationship or co-effect which is sought. In this case, we speak of *spurious relationships*. For example, the relationship between standing stature and seated stature is spurious, since seated stature is part of standing stature, so that a positive relationship between the two characters does not permit any affirmation on the relationship between seated stature and leg-length. A master of the Italian clinical school of human constitution, had based his theory of the compensation between linear dimensions and transverse dimensions of the human body on spurious relationships.

6.6.2. — *Statistical laws of the second type.* We can ask ourselves whether to every statistical law of the first type there is not a corresponding law of the second type.

Let us take, for example, the law according to which a man is taller than a woman (by this is meant the average man and the average woman): it is a question of a law of the first type which establishes a constant relationship between two collective phenomena, average stature of the man and average stature of the woman. To this law of the first type corresponds the law of the second type according to which the probability that a man chosen at random will have a taller stature than that of a woman chosen at random, is greater than $\frac{1}{2}$. The probability of transvariation expresses laws of the second type which correspond to laws of the first type expressed by the difference between the means.

To the laws of the first type expressed by relationships between the age of the bride and the average age of the bridegroom and between the age of the bridegroom and the average age of the bride, corresponds a law of the second type represented by the area of correlation synthetised by the indices of connection and of concordance.

6.6.3. — *Law and regularity.* There is sometimes discussion on the difference between *law* and *regularity*, a difference which, according to some writers, consists in the degree of constancy or precision which is more pronounced in the law and less so in regularity. There are nevertheless, as we have already remarcked, laws which are universally qualified as such and which are only approximate, while, on the other hand, there is no reason why one should not speak of regularity precisely when the relationship is very regular.

A qualitative distinction seems more justified.

It is certain that, if a regularity expresses the constancy of a phenomenon in determined circumstances, it implies a constant relationship between this phenomenon and the circumstances in question and, since these in their turn constitute a phenomenon or phenomena, every regularity may be considered as a constant relationship between two or more categories of phenomena and, in consequence, fall within the concept of law. But, in general,

when we speak of regularity we mean the constancy of a phenomenon which constitutes the characteristic of another phenomenon : for example, fire burns, winter is cold, iron is a good conductor of heat. We can also speak of regularity when the relationship is present between the phenomenon and one of its modalities, as when it is said that more than half of human births are of male sex.

We shall instead reserve the specific denomination of law to the relationship which exists between two distinct phenomena, such as stature and weight, income and wealth.

It must however be observed that, even in this way, the same relationship can be considered as a law or as a regularity : thus, the relative frequency indicated above of the male sex in the births will give rise to a constant ratio between the number of male births and the number of female births, and can therefore be considered as a law.

6.7. Quantification and precise definition of laws.

There are some laws which are innately quantitative. Such was the case, for example, for the law of the excess of male over female human births. This depends on the fact that, in view of the preference that is generally accorded to the male sex and the stronger impression that unpleasant events leave in our memories compared with pleasant ones, it was thought that girls were much more numerous among births than boys. It was only realised that the contrary was the case as a result of statistical surveys which, at the same time, showed the degree of excess of male births.

The law of masculinity can however be expressed quantitatively only with approximation. It will be said, therefore, that, according to the populations, the number of males exceeds that of females by 3 to 15 %.

Other laws have originally been qualitative, such, for example, as the law of the taller stature of men in relation to women, or that female fecundity decreases with the increase of age. This has happened whenever the law has been recognised by common observation without recourse to statistical technique being necessary. In the second of the two examples, the law subse-

quently found quantitative expression or *quantification* in Tait's formula ; in the first, Galton indicated the measurement of the excess of male stature as 8 % (this is however only a mean of the excesses established for various populations ; in general, the difference is more marked among taller populations).

In similar cases, the quantification of laws does not present particular difficulties.

The question becomes more delicate when several factors come into play simultaneously ; the fecundity of couples, for example, depends on the age of the wife, on that of the husband, on the duration of marriage, on the number of previous children, on heredity, occupation etc. The law thus formulated is purely qualitative : a quantification which will allow the measurement of the relative importance of each of these factors is clearly desirable, but is not without difficulties. We have already come up against the question when speaking of the passage from correspondence relationships to those of causality but it should be mentioned again.

The recourse to the method of residues illustrated by J.S. Mill is authorised — as has been said — only on the hypothesis in which the influences of the various factors are additive. This rarely happens for factors of a demographic or economic character. The variation of the population between two censuses can be, for example, divided into a part due to migratory movement (immigration and emigration) and a part due to natural movement (births and deaths) ; given the dates of the censuses, the amounts of the total change and of the natural movement (which are known for nearly all countries), we can deduce the amount of the migratory movement, direct enumeration of which is, for most countries, not feasible.

The method of residues is not, on the contrary, applicable when the variability of the phenomena is the resultant of a systematic component and of an accidental component. In such a case, the square of the deviations, and not the deviations, are additive: the division is then possible on the basis of the additive property of the variances. This property has been applied for the division of the variability of the combinations of sexes in human families into an accidental component and another due to the tendency of couples to generate one sex rather than the other.

But when the variability is the resultant of two or more systematic components, this rule, as has been seen, leads, in the scissory analysis of variance, to contradictory results and must be abandoned (see Chapter XVII, 3).

For the scission of statistical relationships, the method of partial correlation coefficients is commonly used. But it must not be forgotten that this is founded on the same hypothesis as the method of residues (of which it is a particular application) and that moreover it presupposes the linearity of all the relationships.

For the scission of the variations of the intensity of collective phenomena according to time and territorial modalities, recourse is often had to methods of standardisation: this is particularly the case for variations in mortality, natality, nuptiality and other derivation ratios fundamental to Demography, and also for index numbers of prices and of quantities. To this method it is objected that the results can vary according to the type of standardisation adopted, the arbitrariness of which cannot be limited except by means of conventions. It would certainly be more convenient if the results were equal with all the types of standardisation, but as we have observed in connection with the comparison of data (see Chapter XVII, 3. 2. 2. 7), the various types of standardisation correspond in fact to different problems which naturally lead to different solutions. A real drawback lies in the fact that the total of the partial effects calculated by most of the methods in use do not correspond to the aggregate effect, and there is no lack of other incongruities; but these can largely be obviated by recourse to more or less complicated formulae.

In all these cases, a clear distinction should be made between the problem of the scission of the effects of different factors operating simultaneously and the problem of the effect that a certain factor would provoke if the other factors did not exist or remained constant. The two problems would lead to the same solution only on the hypothesis of the independence of one factor from the other. Thus population changes can be divided into those which are the effect of natural movement and those which are the effect of migratory movement, but this does not mean that, in the absence of such migratory movement, the natural movement would be the same, since migra-

tion can have a more or less considerable influence on births and deaths. Similarly, it is possible to divide the amount of expenditure, income or wealth of a population into a component relating to the price and another relating to the quantity, but it is not always possible to affirm that, if the quantities had remained unchanged, the level of prices would have been that observed, or that, if the prices had remained unchanged, the quantities would have been those observed, as one would be justified in expecting if price and quantities were independent of each other.

In the case of collective phenomena, it is advisable that the enunciation of laws should be followed, whenever possible, by the indication of their degree of precision.

Both for laws of the first type, which express certain relationship among collective phenomena, and for laws of the second type, which express uncertain relationships among individual phenomena, there is an uncertainty which depends on the necessarily limited number of observations. In the laws of the first type, the uncertainty is manifested in the measurement of the collective phenomena between which the relationships are established ; in the laws of the second type in the measurement of the relationships of probability established among the individual phenomena. By the calculus of probabilities account can be taken of the size of error to which the quantitative formulation of the statistical law is subject with a certain probability. A precise definition of the statistical law implies the determination of such error.

At the beginning of this course (see Chapter I.2.2) we assigned three tasks to statistical technique : the quantitative expression of collective phenomena of which, without statistical technique, we could have no notion or only erroneous notions ; the quantitative expression of collective phenomena, of which, without statistical technique, we could have notions, but only qualitative ones ; the precise measurement of statistical phenomena of which, without statistical technique, we could have a quantitative notion, but only an approximate one. In the quantification and precise definition of the laws we again find these three tasks of statistical technique.

6.8. Generalisation of laws.

Statistical laws are generally established by induction and their generalisation also assumes the character of an induction, either complete or incomplete, which from particular laws pass to general laws.

Statistical laws, more often than those relating to individual phenomena, are at first established for a period of time and for a limited area: it is therefore natural that their extension to a longer period or a wider territory acquires special importance.

An example of such generalisations concerns the ratios of the sexes at birth. This law had been established in the thirteenth century in Florence on the basis of the baptisms which had taken place in the baptistery of St John's. Four centuries later it was re-discovered in London by John Graunt who, unaware of the observations previously made in Italy, did not exclude the possibility that it might be a particular law, valid only for London, and that a different ratio might be found in other cities and countries. The validity of the law for a large number of countries was established a century and a half later by the work of Johann Peters Süssmilch. Finally, in 1905, in the doctoral thesis *Intorno alla distribuzione dei sessi nelle nascite umane* and in 1908 in the volume *Il sesso dal punto di vista statistico*, Gini excluded the alleged exceptions for colonial and coloured and polygamous people, arctic countries, and the Whites of South Africa. At present, this law must be considered as one of the most general and better established statistical laws.

The generality of a law presents advantages such that, often, its quantitative character already reached or that could easily be reached for particular times or countries, is renounced, for the purpose of enabling the generalisation of the law even though in a qualitative form.

Thus, it would be easy to determine — for each country — the difference (probably more or less constant in time) between the average age of bridegrooms and that of brides, but, in practice, this is foregone in favour of enouncing the general qualitative law that the average age of the bridegroom is higher than that of the bride.

6.9. Deduction.

In deduction from statistical laws, great prudence is necessary in view of the character of approximation that these generally present.

It follows that rigorous deduction from a law that describes the facts with a sufficient approximation, can lead a long way from reality and that, on the other hand, rigorous deduction deriving from a formula too largely approximate to be regarded as satisfactory, can lead to results which fulfil practical purposes extremely well. It also follows that some empirical laws are not suitable for theoretical expression but, at the same time, express sufficient approximations for certain research. There are many theoretical formulae in which, in their applications, terms are neglected which may appear to be of a certain importance, yet thus applied they lead to absolutely satisfactory conclusions from the practical point of view.

Pareto's curve of incomes of the first type gives approximations that are sometimes insufficient for aggregate incomes and are always so for rents, but the concentration curves that Gini has established and which can, on certain hypotheses, be rigorously deduced therefrom, are satisfactorily adaptable, on the contrary, to the distributions of such characters.

On the contrary, it is well known that a formula which interpolates the data observed in a certain interval in the most satisfactory manner, can lead, if extrapolated, to deceptive results.

All that we have said leads to the conclusion that it is advisable to avoid long chains of deductions from statistical laws. The wise statistician will, after every deduction, verify the conclusions that he draws therefrom.

6.10. Verification.

The verification of a law is *direct* when, by means of other cases, we test the law established by explicit incomplete induction or by hypothesis (or a system of hypotheses) ; it is, on the contrary, *indirect* when by the facts or by other laws we test the consequences deduced, either from a law established as evident by explicit complete or incomplete induction, or from a

principle established by implicit induction, or from a hypothesis (or system of hypotheses).

In the case of direct verification, the test concerns the law or hypothesis. In the case of indirect verification, it may concern the truth of the law or principle or hypothesis as well as the rigour of the deduction; when the indirect verification is carried out on the basis of deductions made from a law established by complete induction or from a principle considered evident, it concerns only the rigour of the deduction.

Three points must be borne in mind in connection with the verification of statistical laws.

The first is that, even if a law has been established on the basis of a sufficient number of cases, a verification is always advisable. There are examples in which a law has been established on the basis of what seemed a sufficient number of cases and; subsequently, was shown to be wrong by other proofs. As a matter of fact there is always the possibility — small as it may be — that even in a great number of cases, a frequency error occurs.

This happened with what is called the law of Hofacker and Sadler, two statisticians who, independently of each other and on different data and in different countries, had observed that in human births the sex of the older parent predominated, a rule that further research has not however confirmed.

The second point is that the verification must be made on the basis of a sufficient number of cases, so as to exclude with great probability a casual coincidence. The calculus of probabilities lays down the processes to be followed.

The third point concerns the indirect verification of systems of hypotheses which assume in general the character of theoretical schemes. It is important to remember that the conformity of the facts to the deductions drawn from the scheme only proves that the hypotheses that this implies are sufffcient to explain the facts, but not that they are necessary, and it cannot therefore be regarded as a satisfactory verification of the scheme. It may very well happen that the facts can be explained by other hypotheses. In order that the scheme may be considered as verified, it is necessary that all the hypotheses implied should have been verified separately from one another.

Well-known schemes, that for a long time were held in esteem among statisticians, fell when a rigorous verification was carried out in this way. This is what happened to the scheme proposed by Quetelet to explain the fact that the anthropological characters of adults of the same age and sex follow the curve of accidental errors. Quetelet had thought that the mean corresponded to the value of the character as it would have been determined by heredity and that the deviations were determined by environmental effects. This is not in fact true, except for populations constituted by the so-called pure lines, obtained artificially in experiments. In real life, the separate individuals of a population usually differ from one another also in respect of hereditary characteristics. On the other hand, it is not said that the effects of disturbing causes which compensate one another, also do so in such a way that the observed mean corresponds to the value that would be observed if the disturbing causes — which, in that they compensate one another, are considered as accidental — had not been present. It is, finally, to be remembered that the observations by Quetelet were imperfect and that, when it was possible to have more exact data, it was observed that the anthropometrical characters of adults of the same age and sex do not follow the binomial curve or curve of accidental errors, but a hyperbinomial curve.

If the conformity of facts to deductions drawn from a scheme is not a verification of its validity and if the verification demands the conformity to the facts of all the hypotheses that the scheme implies, it must be said, nevertheless, that, when multiple conclusions, some different from others, are deduced from the scheme and it is found that all conform to the facts, the validity of the scheme, although not rigorously verified, may be regarded as probable and the more probable, the more numerous and varied are the conclusions deduced and tested from it; and especially if another possible scheme cannot be foreseen.

But very often — and especially for collective phenomena — it is advisable to consider several schemes; such is particularly the case when it is a question of proving laws of the second type, which are expressed by means of probability relationships. In such a case the verification can generally not lead to certainty, but only to a more or less high probability that the scheme agrees

with the observed facts. As well as with such probability, it is advisable, on the other hand, to be concerned with the a priori probability of the various schemes submitted to verification, that is to say, with the degree of reliability with which they were presented before the verification in question. One proceeds in this way to the determination of the a posteriori probability of the various schemes, a subject to which we have devoted a special attention (see Chapters XIII and XV).

6.11. Explanation.

There are evident analogies between verification and explanation. The verification of a law or hypothesis consists precisely in an explanation of the facts or of other laws thanks to the said law or hypothesis.

But here, by " explanation " we mean the explanation of the facts or of the laws on the basis of other already verified and accepted laws.

It is open to discussion whether the explanation of facts on the basis of other facts does or does not fall within science, however important it may be from the practical point of view.

For example, to explain a theft by identifying the person who committed it may be important both for the victim and for the police, but it is not considered a task which particularly falls within the competence of the scientist.

On the other hand, the explanation by means of scientific laws, of an epidemic or of the mode of diffusion of epidemics, falls within the competence of the scientist, who knows the said laws and their effects.

Rather than the difficulty of the explanation, we should say that it is general interest which decides upon its scientific character. It is not necessary that the explanation given should be the only one possible. Certainly, this would be desirable, but a possible explanation or several alternative explanations also have scientific value. For a long time, the emission theory and the wave theory of the propagation of light existed side by side until modern theories have, perhaps, unified them ; the authors however who first put them forward certainly carried out scientific work.

It may seem that there is a contradiction between these affirmations and the thesis previously enunciated that the verification of a scheme, which consists in a possible but not necessary explanation of this, cannot be considered as a satisfactory verification. In reality there is an important difference between the two cases. In the case considered in this section, it is a question of a possible explanation of facts on the basis of a proved law; in the case considered in the preceding section, it was a question of a possible explanation of facts on the basis of an uncertain hypothesis, which does not supply any solid foundation either for our theories or for our behaviour.

When a phenomenon has been verified which is only probable, but whose probability is unknown, it is possible to formulate several hypotheses corresponding to the different probabilities of its intervention. A satisfying explanation must take into account all these hypotheses and indicate the probability of each of them. We may call it the *statistical explanation* of the phenomenon. In such a case, we appeal, for the explanation of the phenomenon, to a statistical law of the second type.

6.12. Prediction.

It is said that prediction is the explanation of future facts. Just as the explanation establishes a connection between a fact of the past and a law, so prediction establishes a connection between a law and a fact of the future. There is nevertheless the difference that in the explanation we start from the fact in order to arrive at the law, whereas in prediction we pass from the law to the fact.

Statistical prediction is prediction made on the basis of statistical laws; they can therefore only refer to collective phenomena and consequently demand a sufficient number of cases to avoid the disturbing influence of accidental factors.

There are probabilists who observe that our predictions refer, in the majority of cases — some even say always — to individual phenomena. This is a question of a misunderstanding: our predictions always refer to collective phenomena but only in some cases (as in insurance or in scientific research) are they applied to collective phenomena, while much more often, in prac-

tice, they are applied to individual phenomena. Not knowing all the circumstances which characterise the individual phenomena in question, which would allow a prediction which is certain, we must construct a collective phenomenon which possesses all the circumstances that are known to us for the individual phenomena to which our prediction refers, but which remains indefinite for all the others. It must be added that not even all the known circumstances can be utilised when this would mean reducing too greatly the number of observations effected.

Predictions, must, naturally, take account of the trends that are manifest in the phenomena, but cannot take account of new, unexpected facts which can modify such trends in the future. We can and must, however, bear in mind the possibility of new facts and base the prediction on elements likely to reduce their consequences to a minimum. Experimental research on the extrapolation of series has shown that prediction is more exact if it is obtained by means of a straight line based on the last two terms of the series than by means of a curve of a higher order based on a higher number of terms. Such a result surprised statisticians because it was always held to be advantageous to base interpolation and extrapolation on many parameters: the fact is that such an advantage exists, but it is more than compensated by the smaller influence exercised by new factors when only the two last terms of the series are taken into consideration, as happens when the line passing through these is extrapolated. If, in fact, the straight line passing through the last and the antipenultimate terms is extrapolated, the advantage of a straight line in comparison with a parabola of the second degree disappears ; and the results for curves of a higher degree are similar.

We often hear complaints about the drawbacks of extrapolation, but it is, rather, a question of general drawbacks of prediction : extrapolation, in fact, is nothing but a prediction made with the greatest possible technical precautions, but no technique will give man the capacity to predict the future without risks.

When the circumstance, of which the effects must be predicted, can present autonomous variations, but can in other cases vary as the compensating reaction of the phenomenon and in yet others represent a cumulative effect of it, it is necessary

to pose the question of which alternative it is, that is present in the case in point. According, in fact, to whether it is a question of one or of the other, opposite predictions can be justified. It is necessary to give all the more attention to this since it can happen that we are unaware of the relationship existing. We have already spoken of statistical research which, contrary to the predictions of economists, showed that the prices of imported commodities had decreased after an increase of customs tariffs and had, on the contrary, increased after a decrease of the said tariffs. The apparent contradiction with the economists' thesis can easily be explained : this is not erroneous, but supposes that the variation of the customs tariff is autonomous. Coeteris paribus, it is certain that an increase of tariff tends to raise prices. But this condition, "coeteris paribus", does not occur since the variation of tariffs is, in its turn, an effect of a variation of prices which already exists or is foreseen : tariffs are raised when prices are decreasing or expected to decrease and lowered when prices are rising or expected to rise. The primary variations of prices prevail over those occasioned by the variations of tariffs, which latter are rather to be regarded as a reaction which partially compensates price movements: neither legislators nor economists, nor the public had realised that it was a question of a mechanism of conpensation in which they were participating unawares.

Similar precautions are necessary in other fields.

An autonomous increase of production causes prices to fall ; for this reason the statistical relationship between production and prices in agriculture is negative. If, on the contrary, the increase of production is in general a reaction to an increaseof prices, a positive statistical relationship between the two phenomena follows therefrom, precisely as happens in industry. We have already spoken of this in connection with relationships of causality (see page 18).

Emigration or immigration provoked by a surplus or a shortage of population, reduces these shortages or surpluses and tends to re-establish equilibrium, as European demographers have always maintained. But if, on the other hand, the demographic situation is in equilibrium and the migratory movements are autonomous, the places left by emigration are soon filled by new

births and the influx of immigrants is offset by a decrease of births or by an increase of emigration so that equilibrium is re-established, as Benjamin Franklin and after him many American and some Canadian demographers maintained, Franklin and the Americans giving their attention principally to the decrease of births, and the Canadians to the increase of emigration.

6.13. Application of laws.

The last stage of scientific research is the application of the laws that have been established. It is a stage that can be realised immediately or after a greater or lesser period of time; in some cases, it is a stage that can never be realised; in any case, it is from this, as well as from prediction, that the practical utility of statistical laws derives. Prediction and application are, moreover, closely connected. Application is only the translation into action of prediction and perhaps might be treated jointly, in the same section.

Application can be made to a more or less numerous group of cases, as when the actuary presents the results of a certain form of insurance. It can also be made to an individual case, as when a meteorological official of an aeronautical centre communicates the atmospheric conditions that an aeroplane will meet in a given flight.

It may be observed that, even when it is a question of a group of individual cases (such as a group of insured people) this represents, in its turn, an individual case in relation to the collective phenomenon for which our prediction is valid. In fact, we do not predict the result for the group of insured people in question, but for a group or groups of insured persons, each of them presenting certain characteristics of the group under discussion, those characteristics which seem most important to us (composition according to age, occupation, conditions of health etc.), but not all of them, so that the prediction always remains to a certain extent uncertain.

From this point of view, there is no difference between these cases and those in which it is a question of a single individual phenomenon (as in the prediction of the atmospheric conditions during the flight of an aeroplane).

There is, nevertheless, a difference in the degree of uncertainty, which is the greater, the smaller is the group and which attains its maximum in the case of an individual phenomenon.

The calculus of probability teaches us how to measure such a degree of uncertainty, but the measurement presupposes the determination of the collective phenomenon in which the fact or group of facts falls and, on the other hand, also presupposes that the fact or group of facts differs from the collective phenomenon by circumstances which have no systematic influence on their value. This implies subjective judgements which imply comparative valuations of opposing circumstances.

The wider is the determination of the collective phenomenon, the more closely approximate is the relative law, but the smaller is the number of circumstances that it has in common with the single fact or group of facts under consideration and the greater is the number of those neglected. For example, the father who desires to predict the sex of the next birth, must base himself on the ratio of the sexes in the population to which he belongs and on the conditions in which such a birth will take place. But the delimitation of this population will depend on subjective evaluations : if it is a question of a Lombard agricultural worker, the future father may decide to base himself on the ratio of sexes among Lombard agricultural workers, but he may also take into account the order of generation of the birth and the combination of sexes in previous births. It may nevertheless happen that — thus delimited — the collective phenomenon is too restricted to supply a reliable datum ; then, in order to obtain a datum based on a sufficient number of observations, he must renounce taking account of one of the circumstances or even more than one (region or occupation or order of generation or combination of sexes in previous births).

As a general rule, it is advisable to renounce taking account of the circumstance or circumstances which have less influence on the sex of the new birth, but it is often difficult to have the necessary elements to decide which have greater influence and which have less. We suppose, in every case, that we have neglected the circumstances which have no systematic influence on the determination of the sex and, therefore, we can include the future birth in the delimited collective phenomenon.

But it is, on the other hand, certain that there must be some circumstances that we have neglected and that will cause the next birth to be either male or female ; these circumstances may not have systematic influence in a mass of cases, but have it for the next birth, to which the prediction refers.

The conclusion is that we cannot judge by means of a single application to one fact or to a group of facts whether the application was well based ; only after a series of applications will it be possible to give a judgement in this connection.

Corrado Gini

Gerolamo Cardano e i fondamenti del calcolo delle probabilità [1]

Poche vite si ricordano più avventurose di quella di Gerolamo Cardano e poche figure sono più discusse della sua.

Nasceva da Fazio, giureconsulto milanese che, più che nel campo del diritto, aveva acquisito alta reputazione per le sue conoscenze approfondite della medicina e delle matematiche, nonchè delle scienze occulte, (così da essere più volte consultato da Leonardo da Vinci), e da una vedova di umili condizioni, che solo poco prima di morire Fazio si decise a sposare, legittimando così il figlio Gerolamo.

Le traversie di questo ebbero inizio già prima della nascita, chè la peste, che infieriva a Milano, obbligò la madre a rifugiarsi in casa di amici a Pavia, dove, nel 1501, diede alla luce Gerolamo, mentre l'epidemia le rapì tutti i figli del primo letto.

È curioso come Fazio, il quale pure insegnò geometria all'Università di Pavia e poi alla fondazione Piatti presso l'Ospedale Maggiore di Milano, rifuggisse dall'avviare agli studi superiori il figliolo, che solo con l'appoggio della madre riuscì a vincere la tenace opposizione paterna.

Ma Gerolamo era appena entrato nell'Università di Pavia che questa si chiudeva per la guerra tra Francia e Spagna, così che egli dovette trasferirsi a Padova. Qui brillò subito per iniziativa e combattività, e anche per vanità, qualità che lo portarono a partecipare con successo alle pubbliche dispute scientifiche, talvolta anche contro docenti universitari, e poi ad accettare la

---

[1] Discorso inaugurale del *Corso di Metodologia statistica per ricercatori*, letto nell'Aula Magna dell'Istituto Centrale di Statistica il 20 marzo 1958.

carica di Rettore dell'Università, che era allora abitualmente tenuta da uno studente. Era carica onorifica, ma onerosa, che assorbì il tenue patrimonio che Gerolamo nel frattempo aveva ereditato dal padre, mentre il gioco costituiva il suo principale passatempo, e anche la sua principale fonte di entrata, fornendogli i primi dati sperimentali su cui doveva basare la sua celebre dissertazione sui giochi.

A 25 anni conseguì la laurea in medicina, ma non senza difficoltà, chè solo il terzo scrutinio gli fu favorevole, mentre ostinatamente contrario ad ammetterlo nel suo seno doveva poi mostrarsi il Collegio dei medici di Milano, formalmente a causa dell'illegittimità della nascita, ma sostanzialmente — secondo ogni verosimiglianza — in considerazione del suo carattere notoriamente critico ed aggressivo.

Dopo una tranquilla parentesi come medico nel piccolo villaggio di Sacco presso Padova, messa su famiglia e avendo quindi bisogno di maggiori entrate, si trasferì a Gallarate, terra di suoi antenati, ma con così poca fortuna da dover essere ricoverato, dopo qualche anno, con tutta la famiglia nell'ospizio di mendicità di Milano.

Ma qui la ruota della fortuna inaspettatamente lo sollevò. Per influenza di amici della nobiltà milanese — temperamento passionale, Cardano fu sempre al centro di amicizie devote e di odi feroci — ebbe dalla fondazione Piatti, e tenne con minimo onorario ma con grande successo, l'incarico dell'insegnamento di geometria che già era stato del padre e quelli altresì di aritmetica e di astrologia, nel primo insegnando altresì la geografia e nel secondo l'architettura. Contemporaneamente si faceva strada, vincendo la gelosia dei rivali, nell'arte medica, per quanto il Collegio dei medici persistesse nel rifiutargli l'ammissione. Cambiò, questo, attitudine solo quando Cardano aveva 38 anni, a seguito probabilmente dei vivaci attacchi a cui, giocando tutto per tutto, egli si era risolto, nonchè di autorevoli interventi.

Pochi anni bastarono perchè Cardano divenisse, non solo il Rettore del Collegio, ma anche il più eminente medico di Milano. La sua fama, diffondendosi per tutta Europa, ne fece presto l'emulo di Vesalio e gli procurò via via offerte lusinghiere e vantaggiose da parte di corti reali e imperiali, episcopali e papali, di cui solo una accettò, particolarmente allettante, da parte dell'ar-

civescovo di Scozia, che gli fornì l'occasione, oltre che in un memorabile successo professionale, di un viaggio trionfale attraverso le città di Francia, del Belgio, di Germania e di Svizzera.

Le sue pubblicazioni scientifiche erano numerose e in continuo aumento, nè meno numerosi i manoscritti inediti. In parte altamente specializzati, in buona parte invece avevano carattere divulgativo, ravvivati da illustrazioni e resi attraenti dall'esposizione di superstizioni e da storie stravaganti. Mal protetti dalla legislazione del tempo, divenivano spesso preda di editori stranieri che diffondevano attraverso tutti i paesi la rinomanza dell'autore, talvolta però compromettendolo con interpolazioni fraudolente, che egli era costretto a rettificare.

La varietà degli argomenti, più che sorprendente, è sconcertante. Una metà della sua produzione tratta di medicina, di cui teneva la cattedra all'Università di Pavia e che costituiva la sua precipua occupazione professionale, intesa in tutte le gamme dell'igiene, della terapeutica, dell'odontojatria, della storia della scienza e dell'arte sanitaria e dei suoi risultati, e via dicendo; ma alle matematiche, appena incaricato dell'insegnamento alla fondazione Piatti, aveva dedicato due volumi, e l'astronomia e la fisica vi figuravano largamente, fiancheggiate da trattazioni sulle questioni più disparate di filosofia, di etica, di teologia e di scienze occulte, sulla morte, sull'immortalità dell'anima, sui misteri dell'al di là, in lode di Nerone (al fine di mostrare come anche le peggiori nature umane possano presentare qualche lato buono), sulla musica, sui giochi di azzardo, sui giochi dei dadi, sulle gemme, sui sogni, sulla vita di Cristo e della S. Vergine, sul cristianesimo (che poneva a confronto con le altre religioni), sulla saggezza e sulla morale, nonchè sull'educazione dei figli.

Vi era di che far andare in visibilio — e vi andavano — scienziati e dilettanti, a cui si aprivano nuovi orizzonti dello scibile, ma anche, in tempi di Contro-riforma, di che fornire a nemici appigli per le più pericolose reazioni che, come vedremo, non mancarono.

Ai soprassalti delle vicende personali sovrasta però la tragicità delle vicende familiari.

Rimasto vedovo dopo 14 anni di matrimonio, con tre figli, due maschi e una femmina, aveva bene avviato il prediletto primogenito Giambattista, che, laureato in medicina, praticava a

Milano e aveva cominciato a scrivere saggi scientifici che soddisfacevano il padre.

Il suo matrimonio d'amore con una ragazza di pessimi costumi doveva trascinare tutta la famiglia nel fango e nella miseria. La infedeltà sfacciata, e anzi provocante, della moglie, che non si peritava di dileggiare il marito per non essere padre di nessuno dei figli che essa aveva avuto, fece perdere il lume della ragione a Giambattista che la fece morire di veleno. Arrestato e confesso, a nulla valsero gli sforzi del padre a salvarlo dalla pena capitale, preceduta dalla tortura. Cardano non riuscì mai a riaversi da tale colpo e frattanto la sua posizione a Milano e a Pavia era divenuta così penosa da indurlo a dare le dimissioni dalla cattedra.

Non erano passati due anni che egli veniva chiamato alla cattedra di medicina di Bologna, dove, circondato da amici ed estimatori, riacquistò l'equilibrio e ricevette onori lusinghieri, tra cui la cittadinanza onoraria, che lo compensavano di quanto aveva perduto a Milano.

Ma fu tranquillità di breve momento. Lo aveva accompagnato a Bologna il figlio minore Aldo, vero delinquente abituale, che, dopo aver dissipato i sussidi paterni ed essere stato in prigione a 26 anni, per vari misfatti, ben otto volte, saccheggiò, in combutta con uno degli assistenti paterni, la casa, facendo a pezzi la cassaforte di ferro e fuggendo con un largo bottino di danaro e di gioielli, di pietre preziose e di amuleti particolarmente cari al padre.

Denunciato e arrestato, fu bandito dal territorio di Bologna.

Il vecchio padre, ormai sulla settantina, pare gli avesse già perdonato, quando improvvisamente un più fiero colpo doveva abbattersi su di lui, con l'accusa di eresia che d'improvviso lo trasse dalla cattedra alla prigione. A spiegarla, si pensi all'epurazione, come oggi si direbbe, che era allora in corso, ad opera della Contro-riforma, tra gli intellettuali sospetti di eterodossia, senza che sia necessario dar credito alla voce che egli fosse stato denunciato dal figlio. Sottomesso di fronte al tribunale dell'Inquisizione, sostenuto dalla pubblica opinione, difeso dai suoi allievi, fu rilasciato dopo poco più di due mesi senza esser sottoposto a tortura nè all'umiliante cerimonia della pubblica abiura e solo confinato, ma per non più di un trimestre, sotto sorveglianza speciale, nella sua abitazione.

Perdeva però la cattedra universitaria, doveva sottoscrivere l'impegno a non tenere pubbliche lezioni negli Stati della Chiesa e a non stampare i suoi scritti.

Era questo, per i tempi, un trattamento benevolo, che ha fatto pensare che il processo gli fosse stato fatto, in ragione della sua posizione eminente, a scopo intimidatorio per la classe degli intellettuali più che punitivo per il suo atteggiamento personale, che non era mai stato di ribellione alla Chiesa. Ciò pare comprovato dal fatto che, trasferitosi a Roma, vi ebbe liete accoglienze, fu invitato a divenir membro di quel Collegio dei medici, due volte fu chiamato a curare lo stesso Papa e da questo, in aggiunta al ricavato delle sue prestazioni professionali, ricevette di fatto — singolare attenzione per un accusato di eresia — una pensione. Nè cessò dallo scrivere. Nel manoscritto *De propria vita*, con cui chiuse la sua attività, egli narra le sue vicende e parla del suo carattere. Vi enumera 131 pubblicazioni e 111 manoscritti destinati alla pubblicità (che in gran parte ebbero nella splendida collezione delle sue opere in dieci volumi), mentre 170 erano stati da lui stesso bruciati perchè, come egli scrive, erano dispiaciuti.

Tre volte nella polvere, tre volte sugli altari, Cardano chiudeva così, nella penombra, a 75 anni, la sua travagliata esistenza, oggetto, tra i contemporanei non meno che tra i posteri, di ammirazione e di denigrazione, di invidia e di disprezzo, di implacabili odi e di consolanti attaccamenti, mal ripagato certamente, tutto sommato, dell'altezza e della versatilità del suo ingegno e dell'infaticabile e disinteressata operosità.

* * *

Fu colpa o fu sventura?

Si è meritato Cardano, per il suo carattere, le sconcertanti traversie che lo hanno afflitto, oppure furono, queste, dovute a circostanze eccezionali della famiglia o dell'ambiente?

È probabile che le traversie familiari sarebbero state in gran parte evitate se non fosse morta prematuramente la moglie, lasciando a lui, assorbito dalla professione e dagli studi, il non facile compito della direzione della famiglia. È possibile che essa avrebbe evitato il fatale matrimonio di Giambattista ed è verosimile che Aldo non avrebbe tralignato, come di fatto avvenne, se dai tre anni in su non fosse rimasto privo dell'assistenza materna.

È anche vero che i tempi erano straordinariamente pericolosi per ogni scienzato che, svincolandosi dalla tradizione, ricercava spregiudicatamente la verità. Il libero esame proclamato dalle correnti protestanti, era rigorosamente represso nei paesi latini dalla Contro-riforma ed era difficile non incappare nella sua disapprovazione toccando argomenti scottanti, come molti di quelli abbordati da Cardano.

Da accuse analoghe a quelle a lui rivolte, furono colpiti Andrea Vesalio e Giambattista Porta. Più fortunato, questi potè cavarsela con la sola proibizione di far pronostici ; meno Vesalio che fu condannato a morte, pena commutatagli con l'obbligo di un viaggio alla Terra Santa da cui non doveva far ritorno.

Certamente Cardano aveva mostrato in parecchie occasioni di essere ligio alla fede cattolica, o almeno con tale lealtà aveva giustificato la sua condotta. Aveva rifiutato di diventare medico di corte del sovrano di Danimarca, allegando che non desiderava vivere tra gli eretici, e in Inghilterra, a quanto egli dichiara, mise in pericolo la vita per difendere l'onore della Cattedra di San Pietro e perdette i 9/10 dell'onorario, che gli era stato destinato, per essersi rifiutato di chiamare quel re difensore della fede.

Ma è certo che, se di tale contegno meritorio si poteva tenere, come pare sia stato tenuto, conto nel processo da parte dell'Inquisizione, non si poteva negare che in altre occasioni egli avesse fatto mostra di una spregiudicatezza che, come scienziato, gli torna ad onore, ma, come cattolico, doveva lasciare perplessi sulla sua ortodossia. Egli stesso, d'altra parte, mentre protesta contro l'accusa di eresia, riconosce di avere commesso molti errori e scandalosi.

Certamente, però, molto contribuì alle traversie di Cardano il suo carattere passionale.

Non è da meravigliarsi se i giudizi, che su di lui dettero contemporanei e posteri, furono così disparati, alcuni riguardandolo come un martire della ricerca del vero, e altri come un impostore, alcuni come un genio e altri come un mostro, se egli stesso, nel descrivere il proprio carattere, si attribuisce qualità opposte, estreme nel bene e nel male. Ecco come Cardano espone, tutte di un fiato, le sue caratteristiche : « La natura mi ha fatto idoneo a tutti i lavori manuali. Mi ha dato lo spirito di un filosofo e l'attitudine alle scienze, al buon gusto e alle belle maniere, alla voluttà

e alla letizia. Mi ha fatto fedele, saggio, riflessivo, inventivo, coraggioso, desideroso di imparare e di insegnare, bramoso di uguagliare i migliori, di scoprire cose nuove, di realizzare progressi indipendenti, modesto di carattere, studioso della medicina, interessato alle curiosità e alle scoperte, accorto, astuto, sarcastico, iniziato nelle scienze occulte, laborioso, diligente, ingegnoso, vivente alla giornata, impertinente, spregiatore della religione, invidioso, astioso, cattivo, traditore, mago e stregone, avaro, odioso, lascivo, solitario, sgradevole, rozzo, indovino, invidioso, osceno, bugiardo, ossequioso, amante delle chiacchiere dei vecchi, volubile, irresoluto, sconveniente, donnaiolo, litigioso e, a causa dei conflitti tra la mia natura e la mia anima, non compreso neppure da coloro con cui sto più spesso insieme » (1).

Letteralmente prese, queste qualità appaiono in parte contradditorie, ma gli è che probabilmente egli non intendeva con esse designare caratteristiche immanenti dalla propria personalità, ma piuttosto tendenze, che dovevano entrare in conflitto nell'animo suo e, talune prevalendo in alcune circostanze e altre in altre, conferire alla sua condotta una sconcertante discontinuità e autorizzare su di essa giudizi contrastanti.

Se non che — ci si chiede — fu egli sincero nel parlare di se stesso, e in particolare nella sua autobiografia?

In un certo senso, tutte le autobiografie sono insincere, se ad esse si domanda che rappresentino i veri moventi della condotta degli autori. Necessariamente insincere, perchè i veri moventi delle azioni umane sono ben spesso ignoti a chi le compie e inconsciamente le razionalizza e solo delle motivazioni addotte dalla sua coscienza, anzichè dell'inconscio movente, si rende conto egli stesso e può render conto altrui. Ma, se insincera si intende un'autobiografia che deliberatamente attribuisce alla propria condotta motivazioni diverse da quelle con cui effettivamente la giustificava, allora la prova dell'insincerità riesce difficile.

Nè vale il dire che in diversi periodi della vita o in diverse occasioni le motivazioni sono state diverse, se non addirittura contradditorie, perchè, con l'età e con le circostanze, mutano in tutti gli uomini il comportamento e le sue giustificazioni.

(1) Traduco questo passo dal volume di Ore citato più innanzi, che non dà l'indicazione dell'opera da cui è tolto. Non si tratta evidentemente dell'autobiografia.

D'altra parte si deve tener presente che Cardano, scrivendo la autobiografia alla chiusura della sua tempestosa esistenza, si trovava in condizioni in cui gli sarebbe stato difficile dire tutta la verità, poichè non si può dimenticare che egli era un condannato che, in corso di processo, si era offerto di scrivere un'apologia, vale a dire una difesa, e con essa sperava di ottenere la riabilitazione. Onde si spiega come, contro ogni evidenza, egli in essa negasse di essersi mai dato a pratiche di chiromanzia o astrologia, interpretazione della fisonomia o altre scienze occulte. Nè deve tacersi che, secondo molti, negli ultimi suoi anni la mente sua non funzionava perfettamente e vi è chi addirittura sostiene che fosse affetto da demenza senile.

Certamente non sempre facile riesce di seguire il suo pensiero negli ultimi suoi scritti e ne ho avuto prova io stesso cercando di tradurre, come dirò più innanzi, un suo articolo inedito sopra la durata della vita umana, che nè io nè gli specialisti di storia della scienza, nè i latinisti riuscimmo, salvo nelle grandi linee, àd intendere.

* * *

Senza dar luogo a così violenti discrepanze, come si verifica per il suo carattere, tuttavia anche sul valore scientifico di Cardano le opinioni sono lungi dall'essere concordi.

Bisogna ammettere che, in via generale, la versatilità e la profondità della ricerca male si accordano. Chi, come Cardano, vuole abbracciare tutto — si può dire — lo scibile del tempo, deve forzatamente accogliere i risultati delle ricerche altrui, rinunciando a portare, nella maggior parte degli argomenti, un contributo personale.

Innegabilmente però, nella medicina, che costituì la sua occupazione principale, egli non fu indegno della fama mondiale acquisita, che d'altra parte non avrebbe resistito a frequenti insuccessi, e non può non essere messo a suo credito il distacco che ha segnato dalle idee tradizionali in questo campo.

Un torto, che gli venne rimproverato nei successivi secoli in cui si affermò il positivismo, fu la credenza in fattori soprannaturali e la pratica delle scienze occulte. Con la chiromanzia, la geomanzia, lo studio della fisonomia, l'astrologia, gli oroscopi, questa tendenza certamente si manifesta, ma ben pochi tra i suoi contem-

poranei ne andavano esenti. In epoche in cui la scienza si rende conto di essere insufficiente a spiegare, secondo gli schemi tradizionali, i nuovi fatti che l'esperienza viene accumulando, la fede in fattori sconosciuti inevitabilmente si afferma. Ed è manifesto che tale tendenza successivamente si è di nuovo venuta affermando, e oggigiorno si accentua, in contrapposto alle idee positive prevalse nei secoli passati. D'altra parte, anche nelle ricerche, necessariamente azzardate, che così si compiono alla frontiera dello scibile, può restare il marchio della genialità, e tale è appunto il caso per Cardano per quanto riguarda, ad esempio, l'interpretazione della fisonomia che l'ha fatto considerare un precursore della scuola lombrosiana.

Ma, se Cardano, come tanti altri eccelsi ingegni, si lasciava trascinare da un'incontinente curiosità al di là del solido terreno della scienza, in questo riconosceva però e additava le vie maestre. « Ricorriamo agli esperimenti — incitava — e avranno termine le vane disquisizioni degli epigoni di Aristotele ».

Se egli non ebbe la calma e la concentrazione dello spirito che l'applicazione sistematica del metodo sperimentale esige, pure non mancò saltuariamente di applicarlo e più spesso di segnare, per forza di osservazione e di intuizione, progressi in vari campi delle scienze fisiche.

Escluse, dagli elementi, il fuoco, preparando l'eliminazione del flogisto dalla chimica.

Ebbe intuizioni e fece osservazioni felici nel campo dei colori, della rifrazione dei prismi, dell'attrazione magnetica.

Sperimentò sull'accrescimento di peso nella trasformazione del piombo in cerussa.

Fece progredire lo studio della traiettoria dei proiettili.

Del tempo ragionò precorrendo le vedute moderne.

Ad attenuare i sobbalzi dei viaggi in carrozza, inventò il sistema di sospensione che va tuttora sotto il suo nome.

Anche all'opera di volgarizzazione, che occupa tanta parte della sua produzione, Cardano ha saputo imprimere un'impronta originale, sia elevandone il livello con una raccolta enciclopedica di fatti e di osservazioni, sia ravvivandone, come abbiamo detto, la presentazione e rendendo attraenti gli argomenti che sonnecchiavano nei vecchi schemi, con un successo editoriale di cui non si può negare la spontaneità e la grandiosità.

L'autobiografia, pure redatta nel periodo decadente del suo intelletto e in circostanze che limitavano la sua libertà di espressione, ha segnato un nuovo indirizzo, con un'analisi psicologica di una potenza di cui non si aveva per l'addietro l'esempio.

In un campo che sta al confine tra le scienze naturali e le sociali, trattato fin dall'inizio da statistici e da astronomi, da economisti e da matematici, quello della costruzione delle tavole di mortalità, Cardano fu un audacissimo pioniere.

Quasi un secolo prima che Graunt, uno dei fondatori della statistica, facesse, nel 1661, il tentativo, che parve audace, di costruire una tavola di mortalità, deducendo l'età dei morti, non indicata dalle fonti, dalle cause di morte che più di frequente caratterizzano i vari stadi della vita, Cardano nell'*Opus Novum de Proportionibus*, pubblicato nel 1570, si poneva il problema di tracciare, in base a considerazioni probabilistiche, il decorso naturale della vita (*Spatium vitae naturalis per spatium vitae fortuitum declarare*) partendo dalla nozione di una «età normale» (che egli ottimisticamente poneva a 80 anni), la quale sarebbe raggiunta qualora non intervenissero ad abbreviarla malattie e violenze, infortuni e condizioni antigieniche e introducendo poi una scala secondo cui prolungarne o abbreviarne, con determinate frequenze, la durata.

È difficile giudicare dei dettagli di tale costruzione, data l'oscurità del testo pubblicato, ed è facile, in ogni modo, rendersi conto che il tentativo non avrebbe potuto portare a risultati attendibili se non sulla base di molteplici dati di fatto, di cui Cardano non disponeva, ma deve, in ogni modo, segnalarsi l'introduzione del concetto di età normale, che doveva essere ripreso, con identico significato, tre secoli dopo, da Lexis ed è considerato come un importante acquisto della Demografia.

Se dalle scienze sostanziali - mediche, fisiche, morali — passiamo alle formali, alle matematiche pure, la discrepanza sulla portata dei contributi di Cardano si riduce e, se in parte sussiste, ciò dipende dall'ignoranza dei suoi scritti e anche dalle difficoltà di interpretazione che così spesso si trovano nella lettura dei pionieri in campi scientifici che hanno successivamente adottato espressioni stereotipate.

Cardano fornisce un esempio cospicuo, non certo il solo nella storia del pensiero, di una personalità, la cui fama si basa non

tanto sull'attività che ha assorbito la maggior parte della sua vita e a cui egli attribuiva prevalente importanza, quanto su ricerche collaterali che eseguiva a guisa di passatempo e che in parte deplorava.

Non è - dicevo - un esempio isolato.

Petrarca riguardava come cianfrusaglie i sonetti che tuttora sono riprodotti a modello della nostra lingua, mentre riteneva di dover passare ai posteri per poemi latini di cui appena si ricorda il titolo, e Newton rimpiangeva di avere, con le ricerche che ne hanno immortalato il nome, perduto il suo tempo trastullandosi con dei sassolini in riva all'oceano inesplorato della filosofia e della teologia.

Così Cardano ha coltivato — come i suoi stessi discepoli riconoscevano — le matematiche come un'occupazione secondaria e deplorava poi ripetutamente ed enfaticamente il tempo dedicato ai giochi da cui erano scaturite quelle ricerche che ne fanno quanto meno uno dei massimi precursori, seppure non il vero fondatore, del calcolo delle probabilità.

Un'ombra sul valore scientifico di Cardano gettò la polemica che ebbe con Tartaglia, per intendere la quale conviene però rendersi conto delle singolari condizioni della vita scientifica del tempo, nonchè della evoluzione, che allora si iniziava, nella concezione della missione dello scienziato.

Era invalsa in quel tempo l'abitudine di dispute scientifiche, che si svolgevano tra scienziati di ogni categoria, e anche di altissimo valore, compiutamente organizzate come pubblici spettacoli con premi non disprezzabili per il vincitore e con tutto un sistema di scommesse da parte sia del pubblico che dei contendenti.

Lo stesso favore popolare, in sostanza, che oggi si accorda alle partite di pugilato o di calcio, si accordava allora ai duelli scientifici. Potrà parere a tutta prima che l'umanità proprio non abbia progredito incanalando l'interesse del pubblico verso la potenza fisica e mettendo a sua disposizione esclusiva popolarità e retribuzioni di eccezione, che un tempo potevano essere realizzate con la potenza intellettuale.

Ma in realtà questo vantaggio non andava esente da inconvenienti che non fanno rimpiangere il sistema passato, come attesta l'episodio di Cardano e Tartaglia con gli strascichi che ne seguirono. Tali dispute, infatti, esacerbavano gli animi e toglievano

agli scienziati ogni obiettività. Certamente anche oggi questa non è sempre mantenuta, come si dovrebbe tra ricercatori del vero, ma in ogni modo si intende come dovesse essere molto più difficile mantenerla da parte di chi veniva pubblicamente riconosciuto come sconfitto con danno economico e menomazione di prestigio.

Altra curiosa conseguenza era che i risultati scientifici non venivano — come oggi si cerca di fare — portati quanto prima possibile alla conoscenza del pubblico, ma invece conservati come armi segrete da sfruttare nelle pubbliche dispute. Da ciò appunto nacque il conflitto tra Tartaglia e Cardano.

Tartaglia era riuscito a risolvere una particolare equazione di terzo grado che gli procurò una clamorosa vittoria in una pubblica sfida con un collega bolognese. Cardano, informato, insistette per essere messo a parte della soluzione trovata da Tartaglia e riuscì ad averla solamente obbligandosi al segreto. Se non che apprese poi che tale soluzione era stata precedentemente trovata da Scipione dal Ferro, insigne matematico della scuola di Bologna, e ritenne pertanto che l'impegno preso con Tartaglia non potesse impedirgli dal rendere pubblico — come fece nel suo celebre trattato *Ars Magna* — ciò che altri aveva scoperto. pur debitamente menzionando la riscoperta fattane da Tartaglia.

Dal punto di vista scientifico il suo comportamento si direbbe oggi irreprensibile, e tale pare fosse apparso anche ai contemporanei. Esso si basa d'altronde sopra la concezione più moderna della scienza che, nell'interesse comune, consiglia che i nuovi risultati siano messi alla portata di tutti i ricercatori. Ma, pur restando salvaguardato il suo contributo scientifico, Tartaglia certamente ne riusciva danneggiato dal punto di vista economico poichè gli sfuggiva così di mano l'arma che gli dava il sopravvento nelle sfide scientifiche, onde si intende la sua fierissima reazione che traviò spesso il giudizio dei posteri, gettando sulla lealtà di Cardano un'ombra immeritata.

E, a tenere in ombra le opere scientifiche di Cardano, certamente contribuì la condanna della Chiesa, non tanto per il processo di Bologna, il cui incartamento di epurazione già era stato — come oggi si direbbe — archiviato, quanto per la messa all'indice, seguita alcuni anni dopo la sua morte (nel 1595), delle sue opere più popolari (*De Subtilitate Rerum* e *De Rerum Varietate*). A ciò si attribuisce il fatto che, anche spiriti forti dei secoli che

seguirono, come Galilei, Spinoza, Leibniz, pur conoscendo e avendo studiato Cardano, poco o punto lo citano.

La reazione ha tardato. Ma un'obiettiva valutazione della figura di Cardano, già fatto compiuto in Italia, ora è in corso anche all'estero.

Un volume dal titolo *Cardano the Gambling Scholar*, di Oystein Ore, professore di matematica all'Università di Yale (1), accompagna la traduzione inglese di *De Ludo Aleae* con un'esposizione obiettiva e dettagliata della tempestosa vita di Cardano, del suo carattere enigmatico, delle dispute scientifiche del tempo, e, dopo aver tratteggiato la sua figura come giocatore, interpreta e commenta il testo della sua scienza dei giochi. Pur mostrando di non conoscere alcuni scritti importanti di autori italiani, esso certamente costituisce l'opera più completa, a carattere non tecnico, sulla vita e sui contributi scientifici del Nostro.

L'Ore, da matematico, si sofferma in particolare sui contributi che Cardano ha portato al Calcolo delle probabilità, spiegando, con persuasive considerazioni, le contraddizioni, apparenti o reali, di fronte a cui altri storici delle matematiche si erano arrestati, perplessi e disorientati.

L'Ore ha fornito la chiave di tali contraddizioni, mettendo il luce come il *De Ludo Aleae* non costituisca, per quanto riguarda

---

(1) Oystein Ore, *Cardano, the Gambling Scholar*, Princeton University Press, Princeton N.J., 1953.

Quasi tutte le notizie su Cardano di cui ho usufruito in questa conferenza sono attinte al volume di Ore e alla conferenza di G. Vacca, *L'opera matematica di Gerolamo Cardano nel quarto centenario del suo insegnamento a Milano*, « Rendiconto del Seminario Matematico e Fisico di Milano », Milano, 1937.

Le liste degli scritti su Cardano, citati in appendice a queste due pubblicazioni, si integrano a vicenda. Tra le pubblicazioni posteriori, vedi :

C. Gini, *The first steps of Statistics*, « Educational Research Forum ». Endicott-N. York, 25-29 agosto 1947; edizione spagnola dal titolo *Origines y prospectivas de la Estadistica*, in Suplemento al n. 31 del Boletin de Estadistica, Madrid, 1946.

F.N. David, *Studies in the History of Probability and Statistics. I. Dicing and Gaming* (*A note on the History of Probability*), « Biometrika », vol. 42, Parts 1 and 2, June 1955.

M.G. Kendall, *Studies in the History of Probability and Statistics. II. The Beginnings of a Probability Calculus*, « Biometrika », vol. 43, Parts 1 and 2, June 1956.

almeno i problemi relativi alle probabilità, una esposizione organica, ma un insieme di note che presentano le successive soluzioni a cui progressivamente era giunto l'Autore, senza però cancellare, dopo aver raggiunto la soluzione definitiva, i precedenti tentativi abortiti.

Ciò si spiega con l'origine dello scritto, che nacque dagli appunti presi da Cardano quando, studente a Padova fino al 1526, faceva del gioco il passatempo preferito e ne traeva fonte di guadagno. Gli appunti furono poi riveduti, forse a più riprese, certamente una volta a distanza di 38 anni, verso il 1564. Ma il manoscritto non doveva avere assunto ancora la sua forma definitiva quando l'autore morì, e solo nel 1663 venne pubblicato, probabilmente senza ulteriore revisione.

D'altra parte, quando il *De Ludo Aleae* vide la luce, erano già probabilmente note le considerazioni, ben altrimenti limpide, di Galileo sopra il gioco dei dadi, che egli aveva scritto verso il 1640 ad uso dei nobili della corte di Firenze, nonchè le lettere scambiate tra Pascal e Fermat (1654) e la trattazione di Huygens (1657), onde è comprensibile che i cultori della materia, anche se fossero stati in precedenza informati dei risultati di Cardano dai suoi allievi (i quali verosimilmente, secondo l'uso dei tempi, ne erano stati messi a parte), non sentissero il bisogno di scervellarsi sui suoi manoscritti inediti.

Il volume di Ore permette di valutare nella giusta misura il contributo scientifico del Nostro in questo campo.

Pare chiaro anzitutto che Cardano non si preoccupò solo di risolvere qualche problemino relativo ai giochi dei dadi, degli astragali e delle carte, ma intese formulare criteri generali per il calcolo delle probabilità.

A parte il curioso termine « circuito » con cui Egli indica il totale dei casi ugualmente possibili, a cui si ragguaglia il numero dei casi favorevoli o sfavorevoli all'evento, la definizione, che Egli dà di probabilità, è sostanzialmente uguale a quella, divenuta corrente, sotto il nome di « probabilità matematica », che darà, un secolo e mezzo dopo, Giacomo Bernouilli.

Il fatto che Cardano preferisse spesso ragguagliare i casi favorevoli, anzichè a tutti i casi possibili, alla loro metà, ottenendo una frazione, che egli chiama « proporzione di uguaglianza » e che risulta doppia della probabilità, non ha importanza nè dal punto di vista teorico nè dal punto di vista pratico.

In più luoghi, Cardano afferma che la frequenza non corrisponde, in un numero ristretto di casi, alle previsioni fatte in base alle probabilità, ma si avvicina loro quando questi divengono numerosi. Ciò ha fatto dire a Ore e ad altri che egli aveva la nozione della legge dei grandi numeri. Vi è chi lo contesta, osservando che egli doveva essere giunto a tale conclusione in base all'esperienza e non ad una dimostrazione teorica. Che così sia, invero, non pare dubbio. È già riconosciuto, d'altra parte, che la legge dei grandi numeri non è una proposizione dimostrabile teoricamente nè constatabile empiricamente [1]. Il Castelnuovo parla di una *legge empirica del caso*, a cui noi risaliamo, per intuizione, dall'osservazione di numeri crescenti, ma sempre finiti, di casi [2], ed è quanto è ragionevole pensare facesse Cardano e probabilmente, prima e dopo di lui, indipendentemente da lui, ogni attento osservatore di fenomeni perturbati da circostanze accidentali.

Appartiene innegabilmente a Cardano la formula (o piuttosto l'espressione, chè ancora di formule allora non si faceva uso) che dà la probabilità p^n che un evento, che ha probabilità p di verificarsi in un caso, si verifichi n volte in n casi successivi nell'ipotesi, sottintesa, che la probabilità dell'evento nel corso degli n casi successivi non varii. Ore giustamente propone di chiamarla « formula di Cardano ».

Sbaglia spesso, invece, Cardano (e talvolta poi si corregge) nel determinare la probabilità che, in n casi, un evento avente probabilità p si verifichi almeno una volta o, più in generale, che in n casi si verifichi almeno uno tra più eventi, uguali o diversi, aventi tutti probabilità p. Essa è uguale a $1 - (1 - p)^n$. Ad essa egli sostituisce la quantità np che dà il numero probabile delle volte in cui, negli n casi, l'evento o uno degli eventi si verifica, la quale è naturalmente superiore $1 - (1 - p)^n$ e tanto più quanto più n è elevato.

Si tratta di un'applicazione erronea del teorema della probabilità totale (che altre volte Cardano applica esattamente) in quanto i detti fenomeni uguali o diversi, aventi tutti probabilità p, non siano mutuamente esclusivi. Così l'uscita del numero 6

(1) C. Gini, *Alle basi del metodo statistico*, « Metron », vol. XIV, n. 2-3-4, 1941.

(2) G. Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*, vol. I, 2ª edizione, Zanichelli, Bologna, 1933, pagg. 3-4.

nella gettata di un dado non esclude che lo stesso numero esca in una gettata successiva, di modo che la probabilità di ottenere almeno un sei in due successive gettate non è $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ ma $1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$ ossia $\frac{1}{3}-\frac{1}{36}$, dove $\frac{1}{36}$ rappresenta la probabilità che ilnumero 6 esca in entrambe le gettate.

L'errore è incontestabile, ma è contestabile che la spiegazione risieda nel fatto che i due eventi non sono mutuamente esclusivi.

Effettivamente, non può venire escluso che il numero 6 esca due volte in due gettate ; ma, se p è la probabilità che una persona ha di morire in un volo di aeroplano, si può ben escludere la possibilità che essa muoia due volte in due voli, ma la probabilità di morire in due voli (sottinteso che detta probabilità nel secondo volo sia uguale che nel primo), non è $= 2p$, come suggerirebbe l teorema della probabilità totale, ma $1-(1-p)^2 = 2p-p^2$..

* * *

Ciò consiglia a riprendere in esame il teorema della probabilità composta, uno dei fondamenti del calcolo della probabilità.

L'esame, di cui vi faccio grazia, mi ha portato a una generalizzazione che non mi consta sia stata ancora eseguita.

Dati due eventi, ciascuno suscettibile di verificarsi in un dato luogo e in un dato tempo, o in tempi successivi, l'enunciato corrente del *teorema della probabilità totale* dice :

La probabilità che si verifichi uno dei due eventi, supposti mutuamente esclusivi, è uguale alla somma della loro probabilità.

L'enunciato del *teorema generalizzato della probabilità totale,* a cui sono pervenuto, suona invece :

La probabilità che si verifichi uno dei due eventi è data dalla probabilità che si verifichi uno di essi, più la probabilità che, non essendosi esso verificato, si verifichi l'altro [1].

---

[1] Si noti come esso sia perfettamente simmetrico all'enunciato del *teorema generalizzato della probabilità composta* :

La probabilità che si verifichi il concorso di due eventi, è data dalla probabilità che si verifichi uno di essi, moltiplicata per la probabilità che si verifichi il secondo quando si è verificato il primo.

L'illustrazione del teorema generalizzato della probabilità totale e della sua rispondenza ai vari casi formerà oggetto di un articolo a parte.

Esso è più lato dell'enunciato corrente, anzitutto, perchè comprende il caso in cui i due eventi non sono mutuamente esclusivi.

Ne è più lato, in secondo luogo, perchè si applica a tutte le categorie di probabilità, mentre il consueto enunciato del teorema delle probabilità totali si applica solo a una parte di esse.

È infatti necessario distinguere il caso di più probabilità che si riferiscono allo stesso collettivo, per esempio probabilità che un decesso concernente gli stessi esposti a morire o gli stessi morti, avvenga o sia avvenuto per cancro o per tubercolosi o per senilità da quello di più probabilità che si riferiscono a collettivi diversi, per esempio probabilità di morte di una data persona per un incidente aviatorio in un certo volo o in un volo diverso.

Chiameremo *probabilità giustapposte* le prime e *probabilità contrapposte* le seconde.

Naturalmente la stessa probabilità può essere giustapposta rispetto ad un'altra e contrapposta rispetto a una terza. Per esempio, la probabilità che un parto bigemino nel paese x e nell'anno y risulti di due maschi è giustapposta rispetto alla probabilità che lo stesso parto risulti di due femmine ed è contrapposta rispetto alla probabilità che un parto bigemino risulti di due maschi nello stesso paese x, ma in un diverso anno z.

Ho considerato l'ipotesi più semplice di due eventi che si verificano nello stesso luogo e nello stesso tempo o in tempi successivi e ho anche supposto, come si fa abitualmente, che sia indifferente che prima si presenti l'uno oppure l'altro di essi. Le formule, senza diventare difficili, si complicano quando si considerano parecchi eventi o quando si suppone che essi si verifichino in luoghi diversi o che non sia indifferente che si presenti per primo l'uno o l'altro di essi. Ma, dal punto di vista logico, non variano nè le questioni poste nè le soluzioni offerte, così che mi è parso preferibile di non introdurre complicazioni che avrebbero forse potuto far perdere di vista il punto essenziale.

E ciò tanto più che, da molti, tutte queste disquisizioni potranno essere giudicate pure sottigliezze teoriche, senza pratica portata. Tali per vero le giudicavo anch'io e non mi sarei forse deciso a parlarne se il cortese invito dei colleghi non me ne avesse offerto questa occasione.

E pure sottigliezze teoriche molti giudicavano, e alcuni tuttora giudicano, le considerazioni di Cardano sulla teoria dei giochi. Tali

dovevano parere anche all'autore se le ha tenute nel cassetto per 50 anni (dal 1526 alla sua morte), per lasciarle inedite, senza dar loro forma definitiva.

* * *

Vale forse la pena di ritornare, a questo punto, sugli errori di prospettiva che gli autori commettono nel giudicare della futura sorte dei loro lavori.

Cardano, che, in cinquant'anni, non aveva dato forma definitiva al manoscritto sulla scienza dei giochi, si diceva invece sicuro, dopo averla copiata 5 volte, che la sua *Ars Magna* sarebbe dovuta vivere almeno 20 secoli. Pubblicata nel 1545, essa ebbe invero un'eco potente — e la meritava — tra i matematici di tutta Europa. Ma, a distanza di poco più di 4 secoli, chi la legge? E quanti se ne ricordano? Si è dissotterrato, invece, e si riproduce e si traduce e si analizza il negletto manoscritto sulla scienza dei giochi. Gli è che la marcia travolgente delle matematiche ha sommerso i progressi che l'*Ars Magna* aveva segnato, mentre gli enunciati che stanno a base delle nostre costruzioni scientifiche, come i teoremi fondamentali del calcolo delle probabilità, hanno un interesse immanente, così che noi sentiamo di quando in quando il bisogno di saggiarne la solidità e, se è il caso, di rinforzarla.

E ciò è giusto perchè, come Aristotele diceva in una celebre sentenza, che Tartaglia doveva assumere a sua divisa : « Di ogni cosa il principio è il più importante e pertanto difficilissimo, ma l'aggiungervi è facile ».

Io ho avuto occasione di segnalare insistentemente [1] il pericolo che la nostra economia europea resti schiacciata dai più grossi e potenti, ma da molti punti di vista meno evoluti, blocchi, sviluppatisi ad Oriente e ad Occidente, alle cui iniziative anche in Italia pedissequamente ci si accoda, e vedevo la sola nostra salvezza nello sviluppo di quei settori in cui noi abbiamo occupato e occupiamo posizioni di primo piano, così da poter assumervi ancora l'iniziativa e regolare, o contribuire a regolare, la marcia.

---

[1] Vedi gli articoli *Il sistema della protezione sociale*, in « Rivista di Politica Economica », Gennaio-Febbraio, 1956, riprodotto in *Economia lavorista, Problemi del lavoro*, Utet, Torino, 1956 e *La schiavitù del capitale*, in « Rivista Bancaria «, Gennaio-Febbraio 1958.

Ciò vale, non meno che nel campo dell'economia, in quello della cultura, e, nel campo della cultura, credo che il settore del calcolo delle probabilità e della statistica teorica sia uno di quelli in cui l'Italia deve sforzarsi di conservare le posizioni di avanguardia che aveva raggiunto e svolgere i suoi indirizzi originali. È in questo spirito che ho accettato di inaugurare, con questa lettura, il *Corso di Metodologia statistica per ricercatori*, che spero contribuirà all'attuazione di tale programma.

A. R. KAMAT

Contributions to the theory of statistics based on the first and second successive differences

I. *Introduction* :— In order to estimate the dispersion of a population from a random sample the most commonly used statistic is the sample variance

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1}$$

which is an unbiassed estimate of the population variance, or its square root s, which is called the standard deviation.

Another increasingly used statistic, which gives also an unbiassed estimate of a population dispersion, is the mean difference

$$\Delta = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | x_i - x_j | \tag{2}$$

known as " Gini's mean difference " from the name of the Italian statistician who has introduced it in the statistical methodology as a measure of dispersion (1912) and made a systematic study of it both from the theoretical and a practical point of view (1).

---

(1) The « mean square difference » is given by

$$^2\Delta = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{y=1}^{n} (x_i - x_j)^2}$$

and it is shown that

$$s = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\, {}^2\Delta$$

The mean difference had already been considered — as Gini had recalled — in the past by some astronomers (von Andrae, 1869 ; Jordan, 1869 and 1872 ; Helmert, 1876) for the treatment of the accidental errors of observations following the Gaussian law, with the conclusion that, in this field, it does not present any advantage in comparison with the standard deviation, its sampling error being not less, but somewhat greater. But its use is, on the contrary, to be recommended as the measure of dispersion of a population of different magnitudes, as it is usually the case in the economic, demographic and biological fields.

When the population consists of magnitudes which differ only by accidental errors, the mean difference (which is by definition extended to all the $n(n - 1)$ possible differences between the n magnitudes) does not systematically differ from the mean of the $n - 1$ differences between the successive magnitudes. In such case some authors (Vallier, 1894 ; Cranz and Becker, 1921) have been justified in considering the two statistics as equivalent.

In certain situations however (for instance in testing weapons) due to change in external conditions over which there is no control the mean of the population undergoes a gradual shift even as the observations are being taken and yet it is required to estimate the dispersion of the population at the time of an individual observation. One comes across similar problems in astronomical observations as well. In these circumstances the sample variance s^2 and the mean difference Δ suffer from a heavy bias while estimates based on successive differences are comparatively unaffected by the shift in the population mean.

With a more comprehensive point of view, Gini (1912) had also studied the mean (d) of the successive differences as well as the mean square (δ) of such differences for all kinds of statistical series as well as their relationships with the mean difference, showing that the ratio Δ/d or ${}^2\Delta/\delta$ may be taken as an index of convergency or divergency of the successive terms of the series.

Interest in measures of dispersion based on successive differences has increased since Von Neumann *et al.* (1941) discussed the distribution of the mean square successive difference. Since then a number of papers has been published dealing with statistics based on the successive difference ; for instance Von Neu-

mann (1941), Morse and Grubbs (1947), Arley and Hald (1950), Guest (1951), Kamat (1953*a*, 1953*b*, 1954), Caranti (1953), Benedetti (1953, 1955, 1956), Fortunati (1954) and others to which reference is made in the sequel.

Statistics based on the successive differences or variate differences have been in use for a long time in another connection as well, namely the variate difference method, in the analysis of the economic and other time series. The earliest reference as given by Yule (1921) goes back to Poynting (1884). It is however O. Anderson (1914, 1926, 1927, 1929) who gave the first mathematical exposition of the variate difference-method. Certain aspects of the method including its shortcomings have been discussed by Fisher (1925), Bartlett (1935) and Zaycoff (1935, 1937); the last author has made important contributions to the main theory of the variate difference method. A systematic account of the variate difference method is to be found in Tintner (1940) and it is brought forward in Tintner (1952). Recently the use of successive differences for estimating variability has been proposed in industrial and technological fields also, e.g. by Keen and Page (1953).

In this paper it is proposed to deal with the following statistics based on the first and second variate differences.

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}|x_i - x_{i+1}|\;, & d_2 &= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}|x_i - 2\,x_{i+1} + x_{i+2}|\,, \\ \delta^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2\;, & \delta_2^2 &= \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}(x_i - 2\,x_{i+1} + x_{i+2})^2\,, \end{aligned}\right\}(2)$$

and the ratio statistics based on these and the sample variance s^2 defined in (1) above. A brief review is taken of the previous work on the use and the theory of distribution of these statistics and results of new investigations are reported. In the end asymptotic distributions of these statistics are discussed.

It may be observed at the outset that except in the case of Moore (1954 and 1955) who has discussed the distributions of d and δ^2 for certain non-normal parent populations, and Benedetti (1953, 1955 and 1956) who has discussed the general problem of the maximum of d and δ^2 for random permutations of a set of n

real quantities, almost all results in the previous work have been obtained under the assumption that x_i ($i = 1, 2, \ldots n$) is a random sequence of observations from a normal parent population. In the following also it is assumed that the parent population is normal (μ, σ).

2° *Efficiency, bias and relative merits of* d, δ^2, d_2, δ_2^2.

The question of efficiency of these statistics has been discussed by Morse & Grubbs (1947), Guest (1951) and more comprehensively by Kamat (1953 b). [It may be mentioned that some results are also to be found in Bartlett (1935)]. The asymptotic efficiencies of d, δ^2, d_2 and δ_2^2 are 60.5, 66.7, 47.1 and 51.4 percent respectively. d and d_2 are therefore slightly less efficient than δ^2 and δ_2^2 but the former are of course computationally simpler. Compared with s^2 or s these statistics are markedly less efficient. However as mentioned above their usefulness lies in the fact that they are less affected by the trend in the mean.

The effect of the trend has been studied in Kamat (1953a, 1953b) for statistics s^2, s, d, δ^2 (and also for the mean deviation). We give below the expectation and variance of δ_2^2 and d_2 when the mean is undergoing a trend. Let the mean $\mu_i = \theta_i$ when the ith observation was taken; then if $c_i = \Delta^2 \theta_i/\sigma$, it can be shown that

$$\varepsilon\,(\delta_2^2) = 6\,\sigma^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6\,(n-2)} \Sigma\, c_i^2 \right\} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(\delta_2^2) = \frac{\sigma^4}{(n-2)^2} \{ 140\, n - 352 + 24\, \Sigma\, c_i^2 - \\ - 32\, \Sigma\, c_i\, c_{i+1} + 8\, \Sigma\, c_i\, c_{i+2} \}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\varepsilon\,(d_2) = \sqrt{\frac{12}{\pi}}\, \sigma \left\{ 1 + \frac{1}{12\,(n-2)} \Sigma\, c_i^2 \right\} \tag{5}$$

$$\mathrm{Var}\,(d_2) = \frac{\sigma^2}{(n-2)^2\pi} \Big\{ \Big(6\,\pi + 8\sqrt{5} + 4\sqrt{35} + 16 \sin^{-1} \frac{2}{3} +$$

$$+ 4 \sin^{-1} \frac{1}{6} - 60 \Big)\,(n-2) - \Big(8\sqrt{5} + 8\sqrt{35} + 16 \sin^{-1} \frac{2}{3} +$$

$$+ 8 \sin^{-1} \frac{1}{6} - 72 \Big) + (\pi - 2) \Sigma c_i^2 - \left(2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) \Sigma (c_i^2 + c_{i+1}^2) \quad (6)$$

$$- \left(2 - \frac{1}{3}\sqrt{35}\right) \Sigma (c_i^2 + c_{i+2}^2) - 4 \sin^{-1} \frac{2}{3} \Sigma c_i c_{i+2}$$

$$+ 4 \sin^{-1} \frac{1}{6} \Sigma c_i c_{i+2} \Big\}$$

It may be mentioned that while formulae (3) and (4) are exact formulae (5) and (6) are approximate in that higher powers of c_i are neglected.

Although with a slowmoving trend δ^2 and d often eliminate the effect of the trend to a large extent, situations do arise where the trend is not slowmoving enough for δ^2 and d to be unaffected. But in a large number of cases the trend can be rapresented at least « locally » by a parabola of moderately small curvature and yet allowing the slope to be large. In such cases while δ^2 and d are likely to be seriously affected, δ_2^2 and d_2 will eliminate the linear trend altogether and will be only slightly affected by the quadratic term provided the curvature of the trend is moderate. For instance if the trend is given by $\theta_i = (a i^2 + b i + c)\, \sigma$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, the bias in s^2, δ^2 and δ_2^2 will be given by

$$s^2 : \frac{1}{(n-1)\sigma^2} \sum_i (\theta_i - \bar{\theta})^2 = \frac{n(n+1)}{180} [(16 n^2 + 30 n + 11) a^2 +$$

$$+ 30 (n+1) a b + 15 b^2]$$

$$\delta^2 : \frac{1}{2(n-1)\sigma^2} \Sigma (\Delta \theta_i)^2 = \frac{1}{6} (4 n^2 + 4 n + 3) a^2 + \quad (7)$$

$$+ (n+1) a b + \frac{1}{2} b^2$$

$$\delta_2^2 : \frac{1}{6(n-2)\sigma^2} \sum_i (\Delta^2 \theta_i)^2 = \frac{2}{3} a^2$$

If we tolerate a 5 % bias in the estimated σ^2 then a must be less than 0.274 if we are using δ_2^2 (or d_2). But the same value of a will introduce a heavy bias in the estimates based on δ^2 (and d) even if $b = 0$. For instance for $n = 10$ the bias in δ^2 (and d) will be more than 500 %.

Again Morse and Grubbs (1947) have shown that these statistics may often succeed in eliminating oscillatory trend as well. It can be proved from their results that it is enough to take only 9 observations per period of oscillation to eliminate the oscillatory trend (within 5 % margin for bias) if one uses δ_2^2 (or d_2) but one must take not less than 15 observations per period of oscillation if δ^2 (or d) is used. It is not difficult to visualise situations where the oscillation is slow enough to allow 9 observations to be taken per period but may not be slow enough to allow 15 or more observations per period to be taken.

3° *Examples*: Examples of the use of estimators based on variate differences of various orders are to be found in Tintner (1940, 1952) and Morse and Grubbs (1947). In all of them variances almost stabilize at the first or second order variate differences. We are giving below two examples from two different types of data. Here it appears that variances or standard deviations almost stabilize at the second or third order of differences. The data of these examples will also be used further for illustrating the use of ratio statistics discussed in sections 6 and 7 below.

Example (1): The following data gives raw figures for calorific value of gas obtained from a colliery for 30 successive days: 561, 557, 558, 563, 568, 564, 560, 563, 563, 569, 570, 570, 566, 561, 563, 560, 560, 544, 542, 550, 561, 560, 554, 551, 552, 554, 548, 550, 554, 553.

Here, $s^2 = 54.7690$ $\qquad s = 7.4006,$

$\delta^2 = 25.9310$ $\qquad d = 3.7931,$

$\delta_2^2 = 44.8214$ $\qquad d_2 = 5.3929.$

Order of difference. r	Estimate based on squares $\hat{\sigma}^2$	Estimate based on absolute values $\hat{\sigma}$
0	54.7690	7.4650
1	12.9655	3.3615
2	7.4702	2.7593
3	5.4296	2.3873
4	4.7264	2.1087
5	4.5981	2.1348

Example (2): The following are figures for the monthly consumers' price-index for Bombay City (for all items) for a period of 25 months beginning from January 1952:

346, 351, 358, 359, 363, 371, 373, 376, 371, 368, 361, 359, 363, 348, 349, 355, 355, 367, 366, 362, 364, 363, 361, 358, 352.

Here, $s^2 = 63.1900$ $\quad$ $s = 7.9492$,

$\delta^2 = 31.1667$ $\quad$ $d = 4.3333$,

$\delta_2^2 = 56.6522$ $\quad$ $d_2 = 5.8696$.

Order of difference r	Estimate based on squares $\hat{\sigma}^2$	Estimate based on absolute values $\hat{\sigma}$
0	63.1900	8.0332
1	15.5834	3.8403
2	9.4420	3.2560
3	8.8750	2.8917
4	8.6299	2.8533
5	8.3776	2.9330

4° *Distributions of* δ^2, d, δ_2^2, d_2 :

Exact distributions have not yet been found for any of these statistics. Approximations of the Pearson type curves

based on the first three or four moments have been suggested by Von Neumann, Kent, Bellinson and Hart (1941) for δ^2 and by Kamat (1953a, 1954) for d, δ_2^2 and d_2. Following the method suggested by Fisher and Cornish (1937), Gayen and Jogdeo (1956) have given another approximation for δ^2, which, it is claimed, can be used for framing t- test and F- test procedures based on δ^2-estimates of σ^2. Recently Sathe and Kamat (1957) have suggested approximations of the type $c\,(x^2)^a$ based on the first three moments for these four statistics. (*Cf* Cadwell 1953, 1954). For each of these statistics they find that a constant α may be taken, over a wide range of sample size, with the result that modified F - test procedures can be used for testing the hypothesis that the variability about the trend is the same over two different periods of time. It may also be mentioned that Kamat (1955) [Also see, Geisser, 1956] has shown that by dropping one (or two) observations in the middle we can form a modified form of δ^2 which has an exact distribution and which can be used for framing exact test procedures corresponding to t and F tests. In a similar manner a modified form of δ_2^2 having an exact distribution can also be suggested. However in the case of δ_2^2 the characteristics roots of the quadratic form of δ_2^2 have not yet been found as functions of the sample size n (See: Kamat 1954). The asymptotic distributions of δ^2, d, δ_2^2 and d_2 are considered in section 9 below.

5° *Ratio statistics* :

Let us define the following ratio statistics :

$$w^2 = \frac{\delta^2}{s^2}\,, \quad W = \frac{d}{s}\,,$$

$$w_2^2 = \frac{\delta_2^2}{s^2}\,, \quad W_2 = \frac{d_2}{s} \tag{8}$$

Von Neumann (1941) proposed the statistic $\frac{\delta^2}{s^2}$ for testing the randomness of observations or in other words to detect a trend (or serial correlation). He has obtained the exact distribution and Hart (1942) has calculated the probability points. T.W.

Anderson (1948) has shown that w^2 is linearly connected with the circular autocorrelation coefficient. Kamat (1953a) has proposed W for the same purpose, that is for detecting trend or serial correlation in the sequence of observations. The percentage points of W have been found from a Pearson curve approximation based on its first four moments. Following the procedure of Von Neumann it may be possible to obtain an exact distribution of w_2^2 provided one could find the characteristic roots of the quadratic form of δ_2^2, which however (as mentioned above) have not yet been found for the general case. But it is possible to find the first four moments of w_2^2 and W_2 and suggest approximations of the Pearson Type for them. (This is done in Sections 6 and 7 below). This is possible because all these statistics possess a property of moments given in the theorem stated below.

Theorem : If $\Phi\,(x_i - \bar{x})$ is a homogeneous function of degree k in variables $x_i - \bar{x}$, $(i = 1, 2 \ldots n)$ and $s^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, where x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ is a random sequence of observations from a normal parent distribution, then

$$\mu_r'\left(\frac{\Phi}{s^k}\right) = \frac{\mu_r'(\Phi)}{\mu_r'(s^k)} = \frac{\mu_r'(\Phi)}{\mu_{rk}'(s)} \tag{9}$$

This is a generalisation of particular cases proved in Fisher (1929, 1930), Young (1941), Williams (1941), Von-Neumann (1941) Kamat (1953a, 1953b) etc., and can be proved in the same manner, as for instance in Kamat (1953 b).

We have indicated above the use of w^2 and W. The ratios w_2^2 and W_2 can be used for a similar purpose. In fact if the trend is 'locally' parabolic it is possible to visualise situations where w^2 and W may not go beyond the significance levels and thus may be unable to detect the trend while w_2^2 and W_2 will almost certainly do so.

To illustrate the use of the ratio statistics the data of the examples of section 3 are used here :

Example (1) : Here $w^2 = 0.473$, $\quad W = 0.513$,

$w_2^2 = 0.818$, $\quad W_2 = 0.729$

It can be verified that all these values are significant thus indicating a trend.

Example (2) :Here $w^2 = 0.493$, $W = 0.545$,
$w_2^2 = 0.897$, $W_2 = 0.738$.

We can draw the same conclusion as above.

(*Note* : It may be mentioned here that both Von Neumann (1941) and Kamat (1953[a]) have taken $s^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$ and *not* with a divisior $n - 1$ as defined in (1) above).

6° *Moments and approximate distributions of* w_2^2 :

Making use of the property of moments mentioned in (9) above we have for $w_2^2 = \frac{\delta_2^2}{s^2}$,

$$
\begin{aligned}
\mu_1'(w_2^2) &= 6 \\
\mu_2'(w_2^2) &= \frac{4(m+1)}{m+3}(9 + 35\, m^{-1} - 18\, m^{-2}) \\
\mu_3'(w_2^2) &= \frac{24(m+1)^2}{(m+3)(m+5)}(9 + 105\, m^{-1} + 254\, m^{-2} - 280\, m^{-3}) \\
\mu_4'(w_2^2) &= \frac{48(m+1)^3}{(m+3)(m+5)(m+7)}(27 + 630\, m^{-1} + 4597\, m^{-2} + \\
&\quad + 8250\, m^{-3} - 15664\, m^{-4}) \text{ where } m = n - 2.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Hence the first four central moments are

$$
\begin{aligned}
\mu_1(w_2^2) &= 6 \\
\mu_2(w_2^2) &= \frac{4}{m+3}(17 + 17\, m^{-1} - 18\, m^{-2}) \\
\mu_3(w_2^2) &= \frac{96}{(m+3)(m+5)}(8 + 33\, m^{-1} - 9\, m^{-2} - 70\, m^{-3}) \\
\mu_4(w_2^2) &= \frac{48\, m}{(m+3)(m+5)(m+7)}(289 + 2793\, m^{-1} + \\
&\quad + 6029\, m^{-2} + 79\, m^{-3} - 15222\, m^{-4} - 15664\, m^{-5})
\end{aligned}
\tag{11}
$$

The following table gives μ_2, σ, and β, β_2 values for the statistic $w_2^2 = \frac{\delta_2^2}{s^2}$ for $n = 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50$ and 100.

TABLE I : μ_2, σ *and* β_1, β_2 *values for* $w_2^2 = \frac{\delta_2^2}{s^2}$

n	μ_2	σ	β_1	β_2
5	13.777778	3.7118	0.3631	2.5942
7	9.840000	3.1368	0.2828	2.7369
10	6.852273	2.6177	0.1966	2.7767
15	4.550296	2.1332	0.1289	2.8200
20	3.407407	1.8459	0.0958	2.8511
25	2.723862	1.6504	0.0762	2.8736
30	2.268926	1.5063	0.0633	2.8905
40	1.700966	1.3042	0.0473	2.9137
50	1.360498	1.1664	0.0378	2.9289
100	0.680063	0.8246	0.0188	2.9622

It is clear that as n the sample size becomes large $\beta_1 \rightarrow 0$ and $\beta_2 \rightarrow 3$. From the values of β_1, β_2 it appears that Pearson Type I approximation may be used. It may be possible also to use the Pearson — Merrington tables given in Biometrika Tables for Statisticians, Volume 1 (1954) to find the approximate significance levels for w_2^2.

7° *Moments and approximate distribution of* W_2

By using the same property of moments, and taking $m = n - 2$, the first four moments of W_2 are found as follows :

$$\mu_1'(W_2) = \left[\frac{6\,(m+1)}{\pi}\right]^{1/2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

$$\mu_2'(W_2) = \frac{12}{\pi}\left\{1 + 1.062321\, m^{-1} - 0.519368\, m^{-2}\right\}$$

$$\mu_3'(W_2) = \frac{(m+1)}{(m+2)}\left(\frac{12}{\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{1/2} \cdot$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\{1 + 3.186963\, m^{-1} + 0.429998\, m^{-2} - 1.666781\, m^{-3}\}}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \tag{12}$$

$$\mu_4'(W_2) = \frac{144}{\pi^2}\left(\frac{m+1}{m+3}\right)\{1 + 6.373926\, m^{-1} + 8.221777\, m^{-2} -$$

$$- 5.173059\, m^{-3} - 4.864367\, m^{-4}\}$$

The constants μ_1', μ_2, μ_3, μ_4, and β_1, β_2 are evaluated from formulae (12) and Table 2 gives the values of μ_1', μ_2, σ, β_1 and β_2 for $n = 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50$ and 100.

TABLE 2 : μ_1', μ_2, σ *and* β_1, β_2 *values of* $W_2 = \dfrac{d_2}{s}$.

n	μ_1'	μ_2	σ	β_1	β_2
5	2.079191	0.628847	0.7930	0.0428	2.449
7	2.037183	0.401803	0.6339	0.0208	2.633
10	2.009348	0.258464	0.5084	0.0092	2.746
15	1.989598	0.161616	0.4020	0.0040	2.827
20	1.980284	0.117501	0.3428	0.0022	2.872
25	1.974869	0.092284	0.3038	0.0015	2.897
30	1.971328	0.075976	0.2756	0.0011	2.919
40	1.966978	0.056127	0.2369	0.0007	2.930
50	1.964407	0.044501	0.2110	0.0005	2.941
100	1.959351	0.021860	0.1479	0.0002	2.981

It should be noted that the last figure in the β_2 values given above is not reliable because of the approximations involved in the fourth moment of d_2 (See : Kamat, 1954). It is clear that as the sample size n becomes large β_1 and β_2 approach 0 and 3 respectively. From the values of β_1 and β_2 it appears that the Pearson Type I curve may be used for approximation. As in the case of w_2^2 here also it may be possible to find the approximate significance points of W_2 by using the Pearson Merrington tables referred to above.

8° *Comparison of numerator statistics with ratio statistics :*

It is of some interest to compare the distribution of statistics $\frac{\delta^2}{\sigma^2}$, $\frac{d}{\sigma}$, $\frac{\delta_2^2}{\sigma^2}$, $\frac{d_2}{\sigma}$ with the corresponding ratio-statistics (or "studentised" Statistics) w^2, W, w_2^2, W_2 respectively, While: $\varepsilon\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)$ and $\varepsilon\left(\frac{\delta_2^2}{s^2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\delta_2^2}{\sigma^2}\right)$ for all sample sizes,

$$\varepsilon\left(\frac{d}{s}\right) \rightarrow \varepsilon\left(\frac{d}{\sigma}\right) \text{ and } \varepsilon\left(\frac{d_2}{s}\right) \rightarrow \varepsilon\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)$$

for large samples only. However it can be easily verified that the variances of the studentised statistics are considerably less than those of the corresponding numerator statistics. This is due to a high positive correlation between the numerator statistics and the denominator statistics of the studentised statistics. This correlation can be evaluated. For instance for $w^2 = \frac{\delta^2}{s^2}$,

$$\begin{aligned}
\text{Cov }(\delta^2, s^2) &= \varepsilon(\delta^2 s^2) - \varepsilon(\delta^2)\,\varepsilon(s^2) \\
&= \varepsilon\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right)\varepsilon(s^4) - \varepsilon(\delta^2)\,\varepsilon(s^2) \\
&= \frac{\varepsilon(\delta^2)}{\varepsilon(s^2)}\text{ Var }(s^2)
\end{aligned}$$

Hence
$$\begin{aligned}
\rho(\delta^2, s^2) &= \frac{\varepsilon(\delta^2)\cdot\sigma(s^2)}{\varepsilon(s^2)\cdot\sigma(\delta^2)} \\
&= \frac{\text{Coefficient of variation of } s^2}{\text{Coefficient of variation of } \delta^2} \qquad (13) \\
&= \left(\frac{2n-2}{3n-4}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Similarly $$\rho\,(\delta_2^2, s^2) = \frac{6\,(n-2)}{[2\,(n-1)\,(35\,n-88)]^{1/2}} \qquad (14)$$

$$\rho\,(d, s) = \frac{1.128379}{\sigma\,(d)}\,(C.V.\ \text{of}\ s)$$

$$(15)$$

$$\rho\,(d_2, s) = \frac{1.954410}{\sigma\,(d_2)}\,(C.V.\ \text{of}\ s)$$

The expansions for $\sigma\,(d)$, $\sigma\,(d_2)$ and the coefficient of variation of s cannot be expressed in simple formulae depending on n; hence the formulae (15) cannot be simplified into elegant expressions like the formulae (13) and (14). The following table gives the values of the correlation coefficients for sample sizes $n = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50 and 100. The last row gives their asymptotic values as the sample size becomes large.

TABLE 3. : *Correlation Coefficients* $\rho\,(\delta^2, s^2)$, $\rho\,(d, s)$, $\rho\,(\delta_2^2, s^2)$ *and* $\rho\,(d_2, s)$

n	$\rho\,(\delta^2, s^2)$	$\rho\,(d, s)$	$\rho\,(\delta_2^2, s^2)$	$\rho\,(d, s)$
5	0.853	0.831	0.682	0.667
10	0.832	0.802	0.699	0.677
15	0.826	0.793	0.705	0.680
20	0.824	0.789	0.708	0.681
25	0.822	0.787	0.710	0.682
30	0.821	0.785	0.711	0.683
40	0.820	0.783	0.713	0.684
50	0.819	0.782	0.714	0.684
100	0.818	0.780	0.715	0.685
∞	0.8165	0.7778	0.7171	0.6861

It is also instructive to compare these correlations with the efficiencies of δ^2, d, δ_2^2 and d_2 and to observe that the estimates which are more efficient are also more highly correlated with the most efficient estimator namely s^2 or s as the case may be.

9° *Asymptotic distributions* I.

The asymptotic distributions of δ^2, d, δ_2^2, and d_2 can be obtained by applying the central limit theorem for dependent va-

riables. For instance Hoeffding and Robbins (1948) have proved the following theorem.

Theorem: Defining $\varepsilon(Y_i) = \mu_i$ and $A_i = \text{Var}\ (Y_{i+M}) + + 2 \sum_{j=1}^{M} \text{Cov}\ (Y_{i+M-j}, Y_{i+M})$, if in a sequence of random variables Y_{i+j} is independent of Y_i for $j > M$ and for all i, and the second and the third absolute moments exist for each member of the sequence, and $\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p} A_{i+h} = A$ exists for all i uniformly, then as $N \to \infty$, $\sum_{i=1}^{N} Y_i$ is asymptotically normally distributed with mean $\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$ and varaiance $= NA$.

It follows therefore that δ^2, d, δ_2^2 and d_2 are asymptotic normal with means and variances given below:

	Mean	Asymptotic variance
δ^2	$2\sigma^2$	$\frac{12}{n}\sigma^4$
d	$\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1.052264}{n}\sigma^2$
δ_2^2	$6\sigma^2$	$\frac{140}{n}\sigma^4$
d_2	$\sqrt{\frac{12}{\pi}}\sigma$	$\frac{4.057769}{n}\sigma^2$

Although it is difficult to ascertain exactly for what sample size the normal approximation can be used the speed with which the β_1 and β_2 values of the statistic tend to the normal values 0 and 3 may be taken as an indication of how rapidly the statistic tends to normality.

Another property which may be observed is the independence of $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ and the statistics δ^2, d, δ_2^2 or d_2. Although the

distributions of "Student" Statistics, "stedentised" by these estimates of variability, such as

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}, \quad \frac{\bar{x}-\mu}{d}, \quad \frac{\bar{x}-\mu}{\delta_2}, \quad \frac{\bar{x}-\mu}{d_2} \tag{16}$$

where $\varepsilon(x_i) = \mu$, have not been yet found for small samples it is easily shown (for instance, by using the theorem mentioned in the next section) that they are all asymptotic normal with mean zero and standard deviation $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

10° *Asymptotic distributions* II.

Let us now consider the asymptotic distributions of the ratio statistics w^2, W, w_2^2 and W_2. In the paper mentioned above Von Neumann (1941) has shown, from the limiting forms of the moments, that w^2 is asymptotic normal. Now it can be proved that all these ratio statistics are asymptotic normal on quite general considerations. For instance we have the following theorem. (See: *Cramér* (1945) p. 254 and 259).

Theorem : If X_n is asymptotic normal with mean A and variance $\frac{B}{n}$ and Y_n converges in probability to C, then $\frac{X_n - A}{Y_n}$ is asymptotic normal with mean zero and variance $\frac{B}{C^2 n}$, where A, B, C are some constants. (It should be noted that X_n and Y_n need not be independent).

As an immediate application it can be deduced that the statistics

$$\frac{\delta^2 - 2s^2}{s^2}, \quad \frac{d - \frac{2}{\sqrt{\pi}}s}{s}, \quad \frac{\delta_2^2 - 6s^2}{s^2} \text{ and } \frac{d_2 - \sqrt{\frac{12}{\pi}}\,s}{s} \tag{17}$$

are asymptotic normal with means zero and variances equal to the asymptotic variances of the numerators of the statistics (17) divided by an appropriate term, either σ^2 or σ. That is w^2, W, w_2^2 and W_2 are asymptotic normal with means equal to their

expected values and variances equal to their asymptotic variances as follows :

	Mean	Asymptotic variance
w^2	2	$\frac{4}{n}$
W	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{0.4156}{n}$
w_2^2	6	$\frac{68}{n}$
W_2	$\sqrt{\frac{12}{\pi}}$	$\frac{2.1479}{n}$

(18)

Again the speed with which they tend to normality may be roughly indicated by the rapidity with which the β_1, β_2 values tend to the normal values 0 and 3.

11° *Asymptotic distributions* — III.

Let us define two more ratio statistics

$$u^2 = \frac{\delta_2^2}{\delta^2} \quad \text{and} \quad U = \frac{d_2}{d} \tag{19}$$

The statistic u^2 is not entirely new since it is linearly related to the statistic $\frac{V_2 - V_1}{V_1}$ defined by Tintner (1940) in his discussion of the variate difference method. As Tintner points out u^2 is useful in determining whether the variances stabilise with the first order of differencing. It may also be used in detecting trend or serial dependence which perhaps is left undetected by w^2 or w_2^2. The statistic U which we have defined here will be useful for a similar purpose and is computationally simpler. Although both u^2 and U are criteria of quite some importance it has not yet been possible to obtain their small-sample distributions. Even approximations have not been suggested so far since even the moments have not yet been found. It is possible however to show that they are asymptotic normal. From

the theorem mentioned in section 10 above it can be proved that the statistics

$$u^2 - 3 = \frac{\delta_2^2 - 3\,\delta^2}{\delta^2} \text{ and } U - \sqrt{3} = \frac{d_2 - \sqrt{3}\,d}{d} \qquad (20)$$

are asymptotic normal with means zero and variances equal to the variances of $\dfrac{\delta_2^2 - 3\,\delta^2}{2\,\sigma^2}$ and $\dfrac{d_2 - \sqrt{3}\,d}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sigma}$ respectively. Hence for large samples the ratio stitistics u^2 and U are asymptotic normal with means and variances given below :

	Mean	Asymptotic Variance.
u^2	3	$\dfrac{2}{n}$
U	$\sqrt{3}$	$\dfrac{0.2799}{n}$

(21)

[NOTE : It should be mentioned that the asymptotic normality of $u^2 - 3$ is implicit in the discussion in Tintner (1940), chapters VI and VII and is also explicitly mentioned in Tintner (1952), chapter 11, p. 308. The result is attributed to the work of O. Anderson and Zaycoff referred to above. We have not been able to check whether the asymptotic normality was assumed or has been deduced from convergence theorems as is done here.]

It is difficult to say however for what sample size the normal approximation could be used.

As in section 8 above it is of some interest to find the dependence of δ_2^2 and d_2 on δ^2 and d respectively. The correlation coefficients $\rho\,(\delta_2^2, \delta^2)$ and $\rho\,(d_2, d)$ are positive and very high, as can be seen from the following formulae

$$\rho\,(\delta_2^2, \delta^2) = \frac{10\,n - 21}{[(35\,n - 88)\,(3\,n - 4)]^{1/2}}$$

$$\rho\,(d_2, d) = \frac{(1.979770)\,n - 4.144626}{(n-1)\,(n-2)\,\sigma\,(d_2)\,\sigma\,(d)} \qquad (22)$$

As a consequence the relative variances of u^2 and U should be considerably less than the relative variances of $\frac{\delta_2^2}{\sigma^2}$ and $\frac{d_2}{\sigma}$ respectively. This is easily seen for asymptotic variances given in (21). The following table gives values of $\rho\ (\delta_2^2, \delta^2)$ and $\rho\ (d_2, d)$ for sample sizes $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50$ and 100; and the last line gives their asymptotic values for large n.

TABLE 4 : $\rho\ (\delta_2^2, \delta^2)$ and $\rho\ (d_2, d)$

n	$\rho\ (\delta_2^2, \delta^2)$	$\rho\ (d_2, d)$
5	0.937	0.915
10	0.957	0.938
15	0.964	0.945
20	0.967	0.948
25	0.969	0.951
30	0.970	0.952
40	0.972	0.953
50	0.972	0.954
100	0.974	0.956
∞	0.9759	0.9581

12° *Power of the ratio criteria* :

The question of investigating the power of the various ratio criteria proposed above for specific alternative hypotheses and comparing them on that basis is indeed very important. Little work seems to have been done so far in this direction except that of T.W. Anderson (1948) who has shown that $w^2 = \frac{\delta^2}{s^2}$ is the uniformly most powerful criterion for testing the hypothesis $\rho = 0$ when the sequence x_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ of observations have the distribution law

$$K\, exp\left[-\frac{1}{2}\left[(1 + \rho^2 - \rho)\ (x_1^2 + x_n^2) + (1 + \rho^2) \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - 2\rho \sum_{i=1}^{n-1} x_i\, x_{i+1}\right]\right]$$

where $\varepsilon\ (x_i)$ is taken to be zero. This distribution differs from the distribution law of x_i when they are serially correlated, in the first two terms of the exponential. Both theroretical and empirical investigations on this problem are in hand and it is hoped to report on them in a further communication.

REFERENCES

ANDERSON, O. (1914) : Nochmals über *The estimation of spurious correlation due to position in time or space*, « Biometrika » *10*, 269. (In German)

ANDERSON O. (1926, 1927) : *The variate difference method*, Part I, « Biometrika », *18*, 293 ; Part 2, « Biometrika » *19*, 53. (In German).

ANDERSON, O. (1929) : *A monograph in German on the variate difference method*. (Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung, Frankfurt).

ANDERSON, T. W. : (1948) : *On the theory of testing serial correlation*. « Skandinavisk Aktuarie tidskrift. *31*, 139.

ARLEY, N. & HALD, A. (1950) : *The mean successive difference*. « Mathematische Tidskrift, B, 68.

BARTLETT, M. S. (1935) : *Some aspects in the time-correlation problem in regard to tests of significance*. « J. Roy Statist. Soc. » *98*, 536.

BENEDETTI, C. (1953) : see « Corso di Statistica » di C. Gini a cura di S. Gatti e C. Benedetti, anno accademico 1952-53, Edizione Veschi, Roma ; pp. 250-252.

BENEDETTI, C. (1555) : *Del massimo valore dell'indice di oscillazione in una successione di termini al variare in tutti i modi possibili l'ordine di questi*, « Metron » vol. XVII, N. 3-4.

BENEDETTI, C. (1956) : *Di un massimo dell'indice quadratico di oscillazione*, « Metron » vol. XVIII, N. 1-2.

CADWELL, J. H. (1953) : *Approximating to the distributions of measures of dispersion by a power of chi-square*. « Biometrika », *40*, 336.

CADWELL, J. H. (1954) : *The statistical treatment of mean deviation*. « Biometrika », *41*, 12.

CARANTI, E. (1953) : *Aspetti della misura della variabilità nelle serie storiche*. « Atti della XIII Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica ».

CRAMÉR, H. (1946) : *Mathematical methods of Statistics*. Princeton University Press.

CRANZ, C. & BECKER K. (1921) : *Exterior Ballistics*, London.

FISHER, R. A., (1925) : *The influence of rainfall on the yield of wheat at Rothamsted*. « Phil.Trans. Roy. Soc. London », *213*, 89.

FISHER, R. A. (1929) : *Moments and product moments in sampling distributions*. « Lond. Math. Soc. Proc. » (Series 2), *30*, 199.

FISHER, R. A. (1930) : *The moments of the distribution for normal samples for measures of departure from normality*. « Roy. Soc. Proc. » A, 130, 16.

FISHER, R. A. & CORNISH, E. A. (1937) : *Moments and Cumulants in the Specification of distribution*. « Extrait de la « Revue de Institute International de Statistique. *Vol.*. 14,

FORTUNATI, P. (1954) : *Ancora sulle misure statistiche della variabilità don particolare riferimento all'indice di oscillazione.* « Statistica » anno XIV, 1.

GAYEN, A. K. & JOGDEO, S. S. (1955) : *On the sampling distribuzion of mean square successive difference.* « Proc. First Congress on Theoretical and Applied Mechanics », 253.

GEISSER, S. (1956) : *The modified mean square successive difference and related statistics.* « Ann. Math. Statist. », *27*, 819.

GINI, C. (1912) : *Variabilità e Mutabilità.* « Studi Economico-Giuridici della R. Università di Cagliari », III year, part. 2.

GINI, C. (1939, 1952) : *Memorie di metodologia statistica* : Vol. I : « Variabilità e Concentrazione » 1ª edition 1939, Giuffrè, Milan, 2ª edition with additions by E. PIZZETTI and T. SALVEMINI, 1952, Veschi, Rome.

GUEST, P. G. (1951) : *The estimation of standard error from successive finite differences.* « J. Roy. Statist. Soc. » Series *B*, *13*, 233.

HART, B. I. (1942) : *Tabulation of the probabilities for the ratio of the mean square successive difference to the variance.* « Ann. Math. Statist. » *13*, 207.

HART, B. I. (1942) : *Significance levels for the ratio of the mean square successive difference to the variance.* « Ann. Math. Statist.», *13*, 445.

HELMERT, F. R. (1876) : « Astronomische Nachrichten,» *78*, 127.

HOEFFDING, W. & ROBBINS, H. E. (1948) : *The Central limit theorem for dependent variables,* « Duke Math. Journal », *15*, 773.

JORDAN, W. (1869) : « Astronomische Nachrichten », *79*, 209.

JORDAN, W. (1872) : « Astronomische Nachrichten », *79*, 215.

KAMAT, A. R. (1953 a) : *On the mean successive difference and its ratio to the root mean square,* « Biometrika », *40*, 116.

KAMAT, A. R. (1953 b) : *Some properties of estimates of standard deviation based on deviations from the mean and the variate differences.* « J. Roy. Statisti. Soc. » Series *B*, *15*, 233.

KAMAT, A. R. (1954) : *Distribution theory of two estimates for standard deviation based on second variate differences.* « Biometrika », *41*, 1.

KAMAT, A. R. (1955) : *Modified mean square successive difference with an exact distribution.* « Sankhyà », *15*, 295.

KEEN, J. & PAGE D. J. (1953) : *Estimating variability from the differences between successive readings.* « Applied Statistics, *2*, 13.

MOORE, P. G. (1954) : *The mean successive difference in samples from an exponential population (Abstract).* « Ann. Math. Statist.» *25*, 409.

MOORE, P. G. (1955) : *Properties of the mean square successive difference in samples from various populations.* « J. Amer. Statist. Asso.», *50*, 434.

MORSE, A. P. & GRUBBS, F. E. (1947) : *The estimation of dispersion from differences.* « Ann. Math. Statist. », *18*, 194.

PEARSON, E. S. & HARTLEY, H. O. (1954) : « Biometrika Tables for Statisticians », *Vol. 1*, Cambridge University Press.

POYANTING, J. H. (1884) : *A comparison of the fluctuations in the price of of wheat and in the cotton and silk imports into Great Britain.* « J. Roy. Statist. Soc. » *47*, 34.

SATHE, Y. S. & KAMAT, A. R. (1957) : *An approximation for statistics based on successive differences from a power of chi-square.* « Biometrika, *44*.

TINTNER, G. (1940) : *The variate difference method.* Indiana. Bloomington Press.

TINTNER, G. (1952) : *Econometrics.* New York, John Wiley & Sons. Inc.

VALLIER, E. (1894) : *Ballistique Experimentale.* Paris.

VON ANDRAE, (1869) : « Astronomische Nachrichten », *74*, 283.

VON ANDRAE, (1872) : « Astronomische Nachrichten », *79*, 257.

VON NEUMANN, J. (1941) : *Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance.* « Ann. Math. Statist. », *12*, 367.

VON NEUMANN, J., KENT, R. H., BELLINSON, H. R. & HART, B. I. (1941) : *The mean square successive difference.* « Ann. Math. Statist. », *12*, 153.

WILLIAMS, J. D. (1941) : *Moments of the ratio of the mean square successive difference to the mean square difference in samples from a normal universe.* « Ann. Math. Statist. » *12*, 239.

YOUNG, L. C. (1941) : *On randomness of ordered sequences.* « Ann. Math. Statist. » 293.

YULE, G. V. (1921) : *On the time correlation problem with special reference to the variate difference method.* « J. Roy. Statist. Soc. », *84*, 497.

ZAYCOFF, R. (1935-37) : *Ausschaltung der Sairsonkomponente nach der Methode Von Dr. A. Wald.* « Publications of the statistical Institute for Economic Research, Sofia, No. *2-3* (1935), 263 : No. *4* (1936), 141 ; No. *1* (1937), 75.

C. GINI, C. VITERBO, C. BENEDETTI, A. HERZEL (1)

Problemi di transvariazione inversa

Siano D_1 e D_2 due variabili statistiche, N_1, N_2 il numero dei casi che figurano rispettivamente in D_1 e D_2; M_1, e M_2, σ_1, σ_2 la media e rispettivamente lo scarto quadratico medio di D_1 e D_2.

Nell'ipotesi che le corrispondenti densità di frequenza $g(x)$ e $\varphi(x)$ seguano la legge normale, le costanti di transvariazione si possono esprimere in funzione di M_1, M_2, σ_1, σ_2, N_1, N_2, ossia in funzione della variabilità delle due distribuzioni, delle loro medie e del numero rispettivo di casi che esse comprendono. Viceversa, nel caso di due distribuzioni che seguano la legge normale, sono possibili le seguenti deduzioni:

a) È possibile dedurre da una costante di transvariazione e dalle variabilità dei due gruppi la differenza tra le medie;

b) È possibile dedurre le variabilità dei due gruppi da una costante di transvariazione, dalla differenza tra le medie e dal rapporto tra le variabilità dei due gruppi;

c) Se la variabilità è inoltre la stessa per i due gruppi è pure possibile dedurre da una costante di transvariazione la differenza tra le medie espresse in funzione della variabilità.

In questo studio ci proponiamo appunto di determinare le formule o i procedimenti atti a simili deduzioni, ricavandole, per quanto è possibile, da quelle trovate da Gini - Livada nel caso diretto (2).

(1) I problemi trattati in questo lavoro sono stati impostati dal prof. Gini che ha anche disposto per la raccolta dei dati che hanno servito alla applicazioni e sorvegliato tutto l'andamemto al lavoro. Gli sviluppi matematici e le applicazioni relative si devono: al Dr. C. Viterbo per la transvariazione inversa nel caso di indipendenza; al Dr. C. Benedetti per la transvariazione inversa nel caso di dipendenza e al Dr. A. Herzel per ulteriori applicazioni e commenti comuni alle due parti precedenti; il Dr. C. Benedetti ha inoltre redatto il sommario.

(2) Cfr. C. Gini e G. Livada: *Nuovi contributi alla teoria della transvariazione* in « Atti della VI e VII riunione scientifica della Società Italiana di Statistica ».

I. — Nel problema diretto la probabilità di transvariazione P, in funzione delle variabilità σ_1 σ_2 dei due gruppi e della differenza $d = M_1 - M_2$ tra le medie con $N_1 \lesseqgtr N_2$, è data da:

$P = 1 - \Theta(H d)$ ove $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ è l'integrale di Laplace

ed $H = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$.

Le deduzioni *a*) *b*) *c*) sono quindi immediate e si ha:

a) La differenza tra le medie in funzione della probabilità P e delle variabilità dei due gruppi:

$M_1 - M_2 = \chi_0 \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$ essendo χ_0 dato da $\Theta(\chi_0) = 1 - P$ ossia tabularmente mediante l'integrale di Laplace.

b) La variabilità dei due gruppi in funzione della probabilità P della differenza tra le medie e del rapporto tra la variabilità dei due gruppi:

Si ha, posto $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = t$; $\sigma_2 = \frac{M_1 - M_2}{\chi_0 \sqrt{2(t^2 + 1)}}$ $\sigma_1 = \sigma_2 t$ ove χ_0 è al solito dato da $\Theta(\chi_0) = 1 - P$.

c) La differenza tra le medie in termini delle variabilità, (supposta la stessa per entrambe le distribuzioni) e in funzione di P. Si ha:

$M_1 - M_2 = 2 \chi_0 \sigma$ ove χ_0 è ancora dato da $\Theta(\chi_0) = 1 - P$ ed $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$.

II. — Nel problema diretto, il calcolo dell'*area relativa di transvariazione*, definita dall'uguaglianza:

$$A = \frac{2S}{S_1 + S_2}$$

(ove S è la superficie comune alle due distribuzioni e S_1, S_2 la superficie rispettivamente della prima e seconda distribuzione) è ricondotto al calcolo di S e quindi alla determinazione dei punti di intersezione delle due curve normali. Infatti, determinate le intersezioni, la superficie comune S è calcolata utilizzando l'integrale di Laplace.

Il problema inverso non è così immediato come nel caso precedente. Per trattarlo analiticamente facciamo riferimento a un sistema cartesiano ortogonale avente l'origine nel punto corrispondente alla media di quella distribuzione che presenta un numero di casi superiore. Sia questa media M_1 (sarà di conseguenza supposto sempre $N_1 > N_2$).

Le equazioni delle due distribuzioni D_1 e D_2 riferite a detto sistema sono date rispettivamente da:

$$g(x) = \frac{N_1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \qquad \varphi(x) = \frac{N_2}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-M_2}{\sqrt{2}\,\sigma_2}\right)^2}$$

ove M_2 è l'ascissa corrispondente alla media della distribuzione D_2. Le intersezioni delle due curve sono date dall'equazione di secondo grado in x che si ottiene ponendo $g(x) = \varphi(x)$ ossia da:

$$(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\, x^2 + 2\,\sigma_1^2 M_2 x - \sigma_1^2 M_2^2 + 2\,\sigma_1^2 \sigma_2^2 \log \frac{N_2 \sigma_1}{N_1 \sigma_2} = 0 \qquad (1)$$

(il log è neperiano)

e precisamente da:

$$x_1 = \frac{-\sigma_1^2 M_2 + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2\,(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \log \frac{N_2 \sigma_1}{N_1 \sigma_2} + M_2^2}}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

$$x_2 = \frac{-\sigma_1^2 M_2 - \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2\,(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \log \frac{N_2 \sigma_1}{N_1 \sigma_2} + M_2^2}}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \qquad (2)$$

I valori reali o immaginari, positivi o nulli o negativi di x_1 x_2 si deducono dal seguente prospetto in cui A, B, C rappresentano i coefficienti della x nella (1), ∇ è il discriminante di tale equazione sempre nella ipotesi posta di $N_1 > N_2$.

Per l'ulteriore trattazione dell'argomento è opportuno considerare separatamente i tre casi $\sigma_1 > \sigma_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$.

Per $\sigma_1 > \sigma_2$, i casi in cui si hanno intersezioni reali e finite sono, come si deduce dal prospetto seguente, soltanto i seguenti schematizzati nelle figure 1, 2, 3, 4, ed i loro simmetrici rispetto all'origine.

		∇	A	B	C	x_1	x_2
$\sigma_1 > \sigma_2$	$N_1\sigma_2 < N_2\sigma_1$	$+$	$-$		$+-0\ M_2 \neq 0$ $+\ \ M_2 = 0$	$-$ $-$	$+-0\ M_2 \neq 0$ $+\ \ M_2 = 0$
	$N_1\sigma_2 = N_2\sigma_1$	$+\ (M_2 \neq 0)$ $0\ (M_2 = 0)$	$-$ $-$	$+, -\ M_2 \neq 0$ $0\ M_2 = 0$	$-\ \ M_2 \neq 0$ $0\ \ M_2 = 0$	$+-\ M_2 \neq 0$ $0\ M_2 = 0$	$+-\ M_2 \neq 0$ $0\ M_2 = 0$
	$N_1\sigma_2 > N_2\sigma_1$	$+, 0, -\ M_2 \neq 0$ $-\ M_2 = 0$	$-$ $-$ $-$ $-$		$-$	$\pm$	$\pm$
$\sigma_1 < \sigma_2$		$+$	$+$	$\pm\ M_2 \neq 0$ $0\ M_2 = 0$	$-$	$-$	$+$
$\sigma_2 = \sigma_1$		$+\ M_2 \neq 0$ $0\ M_2 = 0$				$\pm\ \ M_2 \neq 0$ $\infty\ \ M_2 = 0$	∞

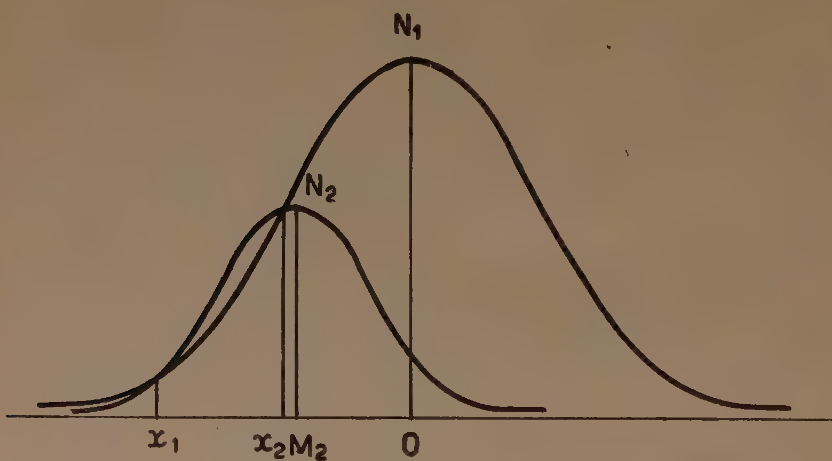


Fig. 1

Indicando con S la superficie comune, con $P\,\left|\overset{\geq}{\underset{<}{e}}\right|$ la probabilità di uno scarto $\gtrless |e|$ e infine con

$$v_1' = P\,|\overset{\leq}{x_1}| \qquad v_1'' = P\,|x_1 \overset{\leq}{-} M_2| \qquad v_2' = P\,|\overset{\leq}{x_2}| \qquad v_2'' = P\,|x_2 \overset{\leq}{-} M_2|$$

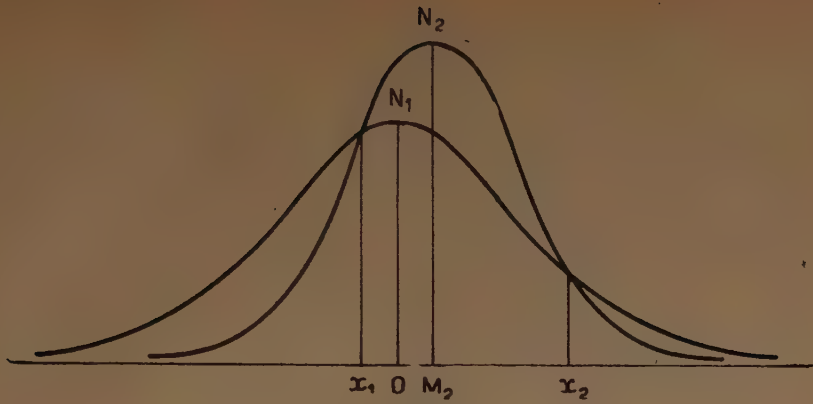


Fig. 2

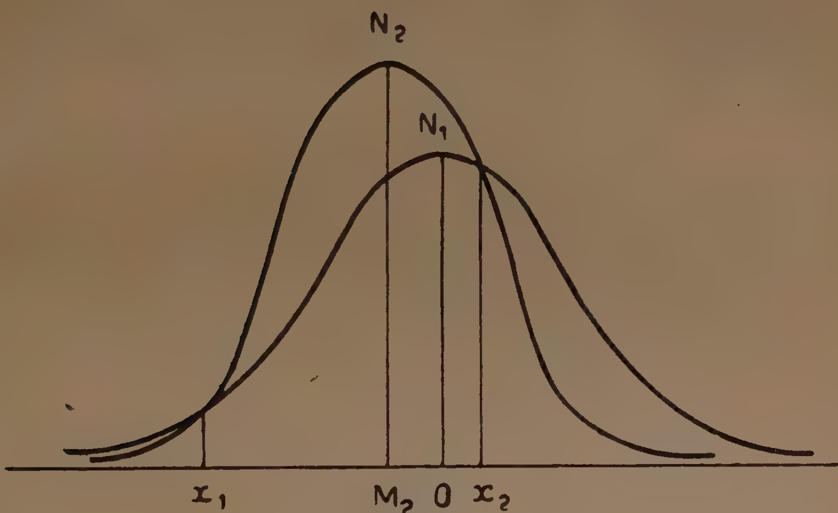


Fig. 3

si ha, per ogni singolo caso:

$$S = N_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\,|x_2 \overset{\leq}{-} M_2| + \frac{1}{2}P\,|x_1 \overset{\geq}{-} M_2|\right) +$$

$$+ N_1\left|\frac{1}{2}P\,|\overset{\geq}{x_2}| - \frac{1}{2}P\,|\overset{\geq}{x_1}|\right| =$$

$$= N_2\left(\frac{1}{2} + \frac{v_2''}{2} + \frac{1 - v_1''}{2}\right) + N_1\left|\frac{1 - v_2'}{2} - \frac{1 - v_1'}{2}\right|$$

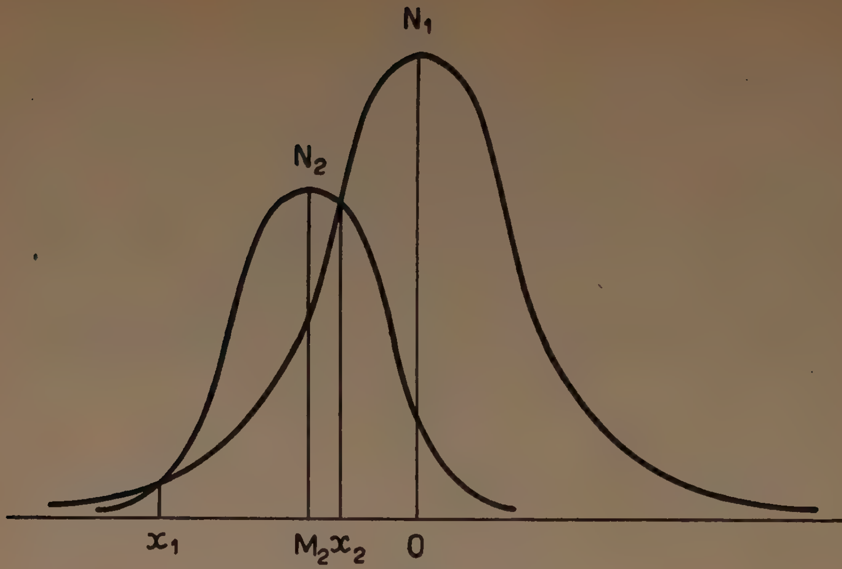


Fig. 4

onde segue :

(I)
$$\underline{2\,S = N_2\,(2 + v_2'' - v_1'') + N_1\,|\,v_1' - v_2'\,|}$$

$$S = N_2\left(\frac{1}{2}\,P\,|\,x_1 \overset{\geq}{-} M_2\,| + \frac{1}{2}\,P\,|\,x_2 \overset{\geq}{-} M_2\,|\right) +$$

$$+ N_1\left(\frac{1}{2}\,P\,|\,\overset{\leq}{x_1}\,| + \frac{1}{2}\,P\,|\,\overset{\leq}{x_2}\,|\right) =$$

$$= N_2\left(\frac{1 - v_1''}{2} + \frac{1 - v_2''}{2}\right) + N_1\left(\frac{v_1'}{2} + \frac{v_2'}{2}\right)$$

onde segue :

(II)
$$\underline{2\,S = N_2\,(2 - v_1'' - v_2'') + N_1\,(v_1' + v_2')}$$

$$S = N_2\left(\frac{1}{2}\,P\,|\,x_1 \overset{\geq}{-} M_2\,| + \frac{1}{2}\,P\,|\,x_2 \overset{\geq}{-} M_2\,|\right) +$$

$$+ N_1\left(\frac{1}{2}\,P\,|\,\overset{\leq}{x_1}\,| + \frac{1}{2}\,P\,|\,\overset{\leq}{x_2}\,|\right)$$

onde si conclude come sopra:

$$S = N_2\left(\frac{1}{2}\,P\,|x_1 \overset{\geq}{-} M_2| + \frac{1}{2}\,P\,|x_2 \overset{\geq}{-} M_2|\right) +$$

$$+ N_1\left|\frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x_2}| - \frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x_1}|\right| = N_2\left(\frac{1 - v_1''}{2} + \frac{1 - v_2''}{2}\right) +$$

$$+ N_1\left|\frac{1 - v_2'}{2} - \frac{1 - v_1'}{2}\right| = N_2\left(\frac{2 - v_1'' - v_2''}{2}\right) + N_1\left|\frac{v_1' - v_2'}{2}\right|$$

onde segue:

$$\text{(III)} \qquad \underline{2\,S = N_2\,(2 - v_1'' - v_2'') + N_1\,|v_1' - v_2'|}$$

Nel caso $\sigma_1 < \sigma_2$ si ha analogamente che le due curve di frequenza presentano intersezioni reali e finite solo nei tre seguenti casi schematizzati nelle figure 5, 6 e 7 e per i quali, mantenendo i simboli già introdotti, si ha:

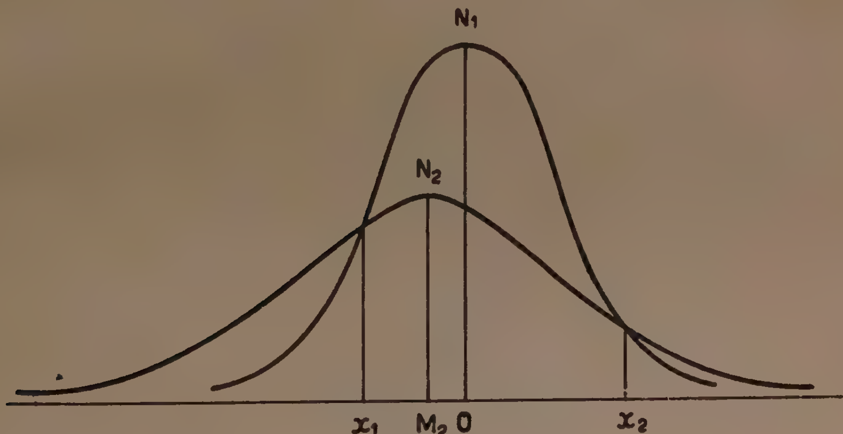


Fig. 5

$$S = N_2\left(\frac{1}{2}\,P\,|x_1 \overset{\leq}{-} M_2| + \frac{1}{2}\,P\,|x_2 \overset{\leq}{-} M_2|\right) +$$

$$+ N_1\left(\frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x_1}| + \frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x_2}|\right) = N_2\left(\frac{v_1''}{2} + \frac{v_2''}{2}\right) +$$

$$+ N_1\left(\frac{1 - v_1'}{2} + \frac{1 - v_2'}{2}\right) = \frac{N_2}{2}\,(v_1'' + v_2'') + \frac{N_1}{2}\,[2 - (v_1' + v_2')]$$

onde :

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \underline{2\,S = N_2\,(v_1'' + v_2'') + N_1\,(2 - v_1' - v_2')}$$

$$S = N_2 \left| \frac{1}{2} P \,|\, x_2 \overset{\geq}{-} M_2 \,| - \frac{1}{2} P \,|\, x_1 \overset{\geq}{-} M_2 \,| \right| +$$

$$+ N_1 \left(\frac{1}{2} P \,|\, \overset{\geq}{x_1} \,| + \frac{1}{2} P \,|\, \overset{\geq}{x_2} \,| \right) =$$

$$= N_2 \left| \frac{1 - v_2''}{2} - \frac{1 - v_1''}{2} \right| + N_1 \left(\frac{1 - v_1'}{2} + \frac{1 - v_2'}{2} \right)$$

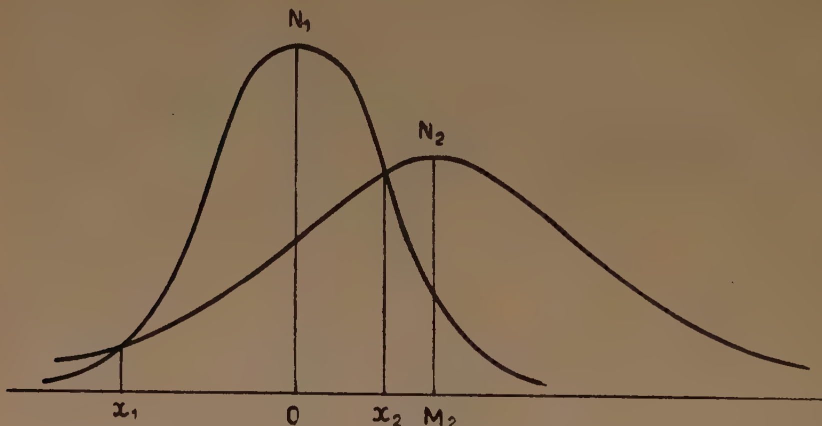


Fig. 6

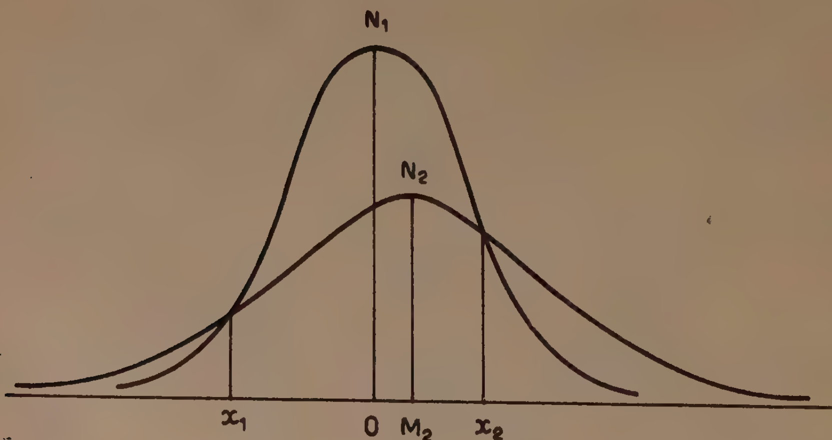


Fig. 7

onde segue:

$$\text{(II}')\qquad \underline{2\,S = N_2\,|v_1'' - v_2''| + N_1\,(2 - v_1' - v_2')}$$

$$S = N_2\left(\frac{1}{2}\,P\,|x_1 \overset{\leq}{-} M_2| + \frac{1}{2}\,P\,|x_2 \overset{\leq}{-} M_2|\right) +$$

$$+ N_1\left(\frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x_1}| + \frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x_2}|\right)$$

onde segue la (I')

Nel caso infine che $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, supponendo ancora $N_1 > N_2$ non possono aversi che questi due tipi di casi di intersezione — v. figg. 8 e 9 — (e i simmetrici rispetto all'origine), nei quali con evidente significato dei simboli si ha:

$$S = N_1\frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x}| + N_2\,\frac{1}{2}\,P\,|x \overset{\geq}{-} M_2| = N_1\,\frac{1}{2}\,(1 - v') + N_2\,\frac{1}{2}\,(1 - v'')$$

onde:

$$\text{(I}'')\qquad \underline{2\,S = N_1\,(1 - v') + N_2\,(1 - v'')}$$

$$S = N_1\,\frac{1}{2}\,P\,|\overset{\geq}{x}| + N_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,P\,|x \overset{\leq}{-} M_2|\right) =$$

$$= N_1\,\frac{1}{2}\,(1 - v') + N_2\left(\frac{1}{2} + \frac{v''}{2}\right)$$

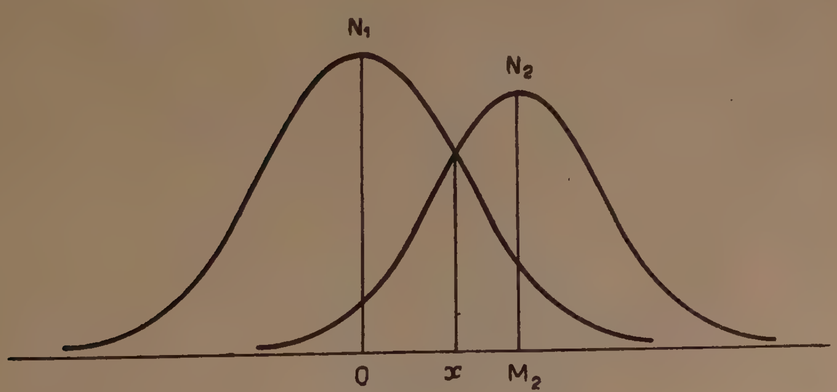


Fig. 8

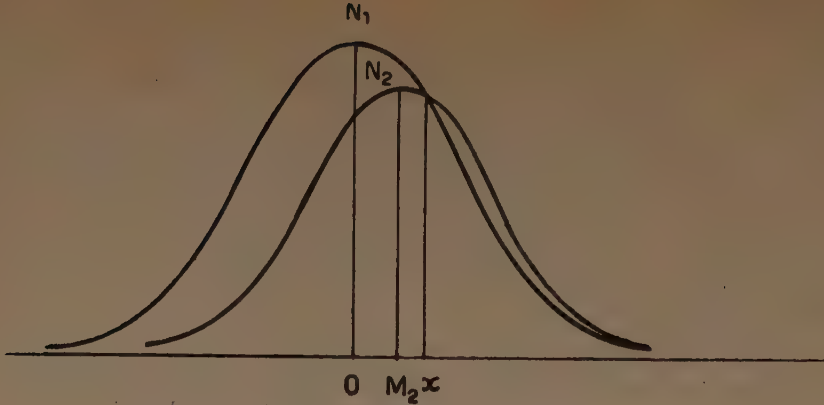


Fig. 9

onde :

(II″) $$2S = N_1(1 - v') + N_2(1 + v'')$$

a) Vediamo adesso come dalla conoscenza dell'area relativa di transvariazione e dalla variabilità σ_1, σ_2 dei due gruppi di quantità N_1 e N_2 è possibile dedurre la differenza tra le medie.

Trattiamo prima il caso in cui le due curve di frequenza presentano due intersezioni reali al finito (ossia $\sigma_1 \neq \sigma_2$) e di poi il caso in cui presentano una sola intersezione reale al finito ($\sigma_1 = \sigma_2$)

Nel primo caso di corrispondenza delle due intersezioni x_1 e x_2 avremo gli scarti $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_1 - M_2|$, $|x_2 - M_2|$ che esse presentano rispetto a $M_1 = 0$ e a M_2 nella D_1 e D_2 rispettivamente ; e conseguentemente gli scarti ridotti :

$$\lambda_1' = \frac{|x_1|}{\sqrt{2}\,\sigma_1} \quad \lambda_2' = \frac{|x_2|}{\sqrt{2}\,\sigma_1} \quad \lambda_1'' = \frac{|x_1 - M_2|}{\sqrt{2}\,\sigma_2} \quad \lambda_2'' = \frac{|x_2 - M_2|}{\sqrt{2}\,\sigma_2} \tag{3}$$

In corrispondenza a tali scarti ridotti l'integrale di Laplace :

$$(4)\begin{cases} \Theta(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-z^2}\,dz \\ \Theta(\lambda_1') = v_1' \\ \Theta(\lambda_1'') = v_1'' \\ \Theta(\lambda_2') = v_2' \\ \Theta(\lambda_2'') = v_2'' \end{cases}$$

ci fornisce i quattro valori v_1', v_1'', v_2', v_2'' che esprimono la probabilità di uno scarto rispettivamente non superiore a $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_1 - M_2|$, $|x_2 - M_2|$. I quattro valori v_1', v_1'', v_2', v_2'' sono, per quanto si è precedentemente esposto, legati da una delle relazioni (I), (II), (III), (I′) (I″) e precisamente da una delle prime tre o delle seconde due, secondo che sia $\sigma_1 > \sigma_2$ oppure $\sigma_1 < \sigma_2$.

Abbiamo in ogni caso, essendo S ricavabile, per la definizione di area relativa di transvariazione, dalla relazione:

$$S = A\,(S_1 + S_2)/2$$

che nel nostro caso si può scriversi:

$$S = A\,(N_1 + N_2)/2$$

undici incognite, $M_2, x_1, x_2, \lambda_1', \lambda_1'', \lambda_2', \lambda_2'', v_1', v_1'', v_2', v_2''$ ed undici equazioni rappresentate due dalle (2), quattro dalle (3), quattro dalle (4) e l'ultima data da una delle (I) (II) (III) (I′) (II′), equazioni necessarie e sufficienti per la determinazione delle incognite e in particolare di M_2.

Per tale determinazione un sistema pratico può essere il seguente:

Costruiamo la seguente tabella nella cui prima colonna poniamo valori arbitrari e successivi di M_2 e in corrispondenza a ciascun valore, servendoci delle equazioni (2), poniamo nelle due successive colonne i valori di x_1 e x_2. Determinati questi valori si porranno nelle successive quattro colonne, mediante le (3), i

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
M_2	x_1	x_2	λ_1'	λ_1''	λ_2'	λ_2''	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	S
—											—
—											—
—											—

valori dei corrispondenti scarti ridotti i quali ci permetteranno di determinare tabularmente mediante le (4) i quattro corrispondenti valori dei v.

La conoscenza infine di M_2, x_1, x_2 oltrechè di σ_1, σ_2 ci permette altresì di determinare quale delle relazioni che legano le v va applicata al caso, e quindi, mediante essa, di determinare il corrispondente valore di S.

Avremo così, nella prima colonna vari valori di M_2 cui corrisponderanno nell'ultima, vari valori di S. Riportando, in un sistema ortogonale di assi cartesiani i valori di M_2 sulle ascisse e i corrispondenti valori di S sulle ordinate, verremo a determinare per punti una curva. L'intersezione di queste con la retta di equazione $\overline{S} = S$ ove $\overline{S}$ rappresenta il valore assegnato di S, ci fornisce mediante la sua ascissa il valore $\overline{M}_2$ cercato (v. fig. 10).

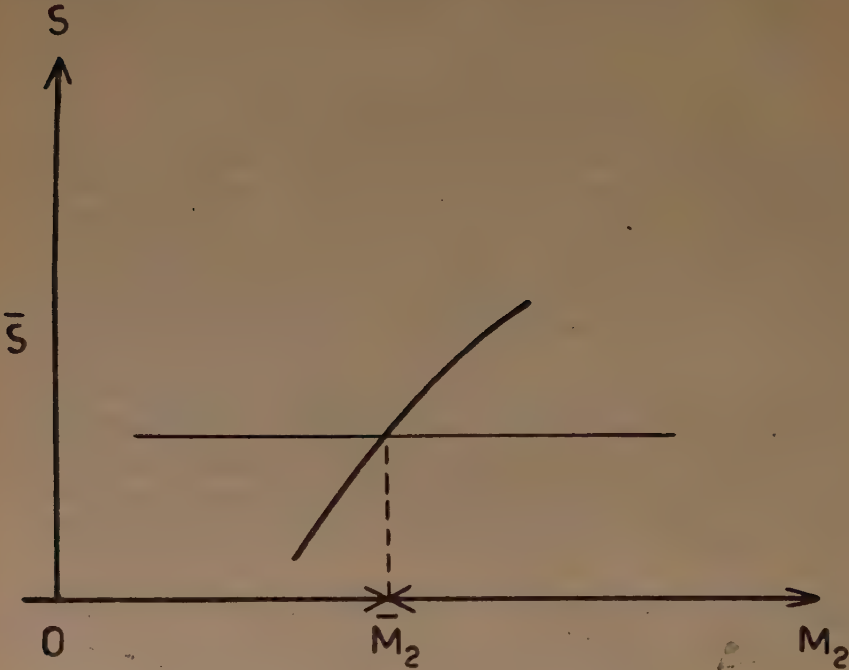


Fig. 10

Per mostrare come praticamente si conducano i calcoli e i risultati a cui portano, illustriamo con un esempio quanto abbiamo esposto.

Consideriamo le due distribuzioni di stature, la prima di Veneti e la seconda di Sardi, per le quali Gini e Livada determinarono nel problema diretto l'area relativa di transvariazione.

Per tali distribuzioni si ha :

Veneti	Sardi
$N_1 = 30520$	$N_2 = 7028$
$\sigma_1 = 6{,}40$	$\sigma_2 = 6{,}84$

$$A = 0{,}348$$

Segue $S = (N_1 + N_2)\, A/2 = 6526$,

Sappiamo a priori che la statura media dei Veneti è superiore a quella media dei Sardi, pertanto, posto secondo le nostre convenzioni, $M_1 = O$ (in quanto si ha $N_1 > N_2$) la differenza fra le stature medie sarà espressa da M_2 che è la statura media minore. Attribuiremo pertanto a M_2 valori negativi crescenti a partire da o e determiniamo i valori corrispondenti di S secondo quanto è stato ampiamente esposto in precedenza.

I risultati sono riportati nel seguente specchietto :

M_2	x_1	x_2	λ_1'	λ_1''	λ_2'	λ_2''	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	S
0	—31,7860	31,7860	3,51	3,29	3,29	3,29	∽1	∽1	∽1	∽1	7828
—1	—25,6567	39,7188	2,83	2,55	—	—	∽1	0,99970	∽1	∽1	7026
—2	—21,1054	49,2296	2,33	1,98	—	—	0,99902	0,99489	∽1	∽1	7021
—3	—17,9067	60,0929	1,98	1,54	—	—	0,99489	0,97039	∽1	∽1	6997
—4	—15,6098	71,8581	1,72	1,20	—	—	0,98500	0,91031	∽1	∽1	6937
—5	—14,0643	84,3746	1,55	0,94	—	—	0,97162	0,81627	∽1	∽1	6811
—6	—12,9696	97,3420	1,43	0,72	—	—	0,95686	0,69143	∽1	∽1	6602
—7	—12,2507	110,6852	1,35	0,54	—	—	0,94376	0,55494	∽1	∽1	6322

È da notare come tale calcolo non sia così laborioso come può sembrare a prima vista. Abbiamo, infatti, tralasciato il calcolo dei λ quando essi assumevano valori superiori a 3,5, essendo noto che la funzione $\Theta\,(x)$ in corrispondenza a tali scarti ridotti fornisce valori praticamente identificabili con l'unità.

Per il calcolo di S, essendo nel caso considerato $\sigma_1 < \sigma_2$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ $M_2 < 0$ ci siamo serviti della (I').

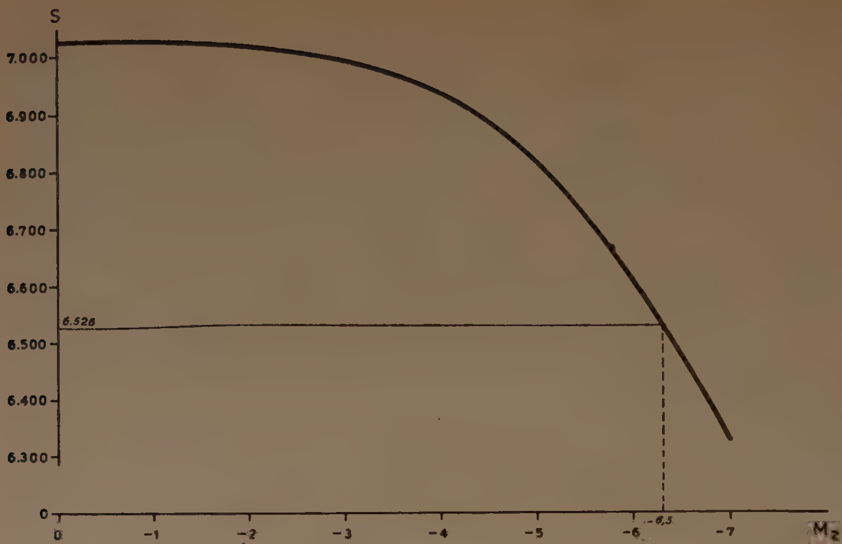


Fig. 11.

Si vede che il valore di $S = 6526$ è compreso fra 6602 corrispondente a $M_2 = -6$ e 6322 corrispondente a $M_2 = -7$. Interpolando fra questi due valori si trova che al valore di $S = 6526$ corrisponde il valore $M_2 = -6{,}27$.

Analogamente, ricorrendo alla rappresentazione grafica, si trova $M_2 = 6{,}3$ (v. fig. 11). In entrambi i casi essi corrispondono abbastanza bene al valore effettivo della differenza fra le stature medie delle due distribuzioni considerate, valore dato da cm. 6,7.

Nel caso infine di $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ una delle due intersezioni va, come sappiamo, all'infinito mentre quella al finito, che indicheremo semplicemente con x, dà luogo agli scarti ridotti:

$$\lambda' = \frac{|x|}{\sqrt{2}\,\sigma} \qquad \lambda'' = \frac{|x - M_2|}{\sqrt{2}\,\sigma} \qquad x = \frac{2\,\sigma^2 \log \dfrac{N_1}{N_2} + M_2^2}{2\,M_2}$$

in corrispondenza dei quali l'integrale di Laplace ci fornisce i corrispondenti v', v'' legati tra di loro o dalla relazione (I'') o dall'altra (II''). Possiamo quindi in questo caso procedere più speditamente, essendo da considerare la sola intersezione al fi-

nito, e mediante l'analoga tabella pervenire allo scopo come abbiamo fatto nel caso precedente.

M_2	x	λ'	λ''	v'	v''	S

b) È possibile dedurre le variabilità dei due gruppi dalla conoscenza dell'area relativa di transvariazione, della differenza tra le medie e del rapporto tra le variabilità dei due gruppi, procedendo con un metodo perfettamente analogo a quello esposto nel caso precedente *a*).

Se ci riferiamo al solito sistema cartesiano, con le convenzioni e il simbolismo già introdotti, notiamo che il problema si riduce alla determinazione di σ_1 e σ_2 dalla conoscenza di N_1, N_2, $M_1 = 0$ M_2; A e del rapporto $\sigma_1/\sigma_2 = u$.

L'equazione già considerata:

$$(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\, x^2 + 2\,\sigma_1^2\, M_2\, x - \sigma_1^2\, M_2^2 + 2\,\sigma_1^2\,\sigma_2^2 \log \frac{N_2\,\sigma_1}{N_1\,\sigma_2} = 0 \qquad (1)$$

che ci fornisce le intersezioni x_1 e x_2 delle due curve di frequenza nell'ipotesi che esse seguano la legge normale, introducendovi il rapporto $\sigma_1/\sigma_2 = u$, diventa:

$$(1 - u^2)\, x^2 + 2\, u^2\, M_2\, x - u^2\, M_2^2 + 2\, u^2\, \sigma_2^2 \log \left(\frac{N_2}{N_1}\, u\right) = 0$$

e dà le due intersezioni:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-\, u^2\, M_2 + u \sqrt{2\,(u^2 - 1)\,\sigma_2^2 \log \left(\frac{N_2}{N_1}\, u\right) + M_2^2}}{1 - u^2} \qquad (2')$$

in corrispondenza ad ogni valore arbitrario attribuito a σ_2.

È allora possibile costruire la tabella nella cui prima colonna si pongono valori positivi arbitrari e crescenti di σ_2 e mediante

σ_2	x_1	x_2	λ_1'	λ_1''	λ_2'	λ_2''	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	S

la (2′) si determinano le corrispondenti intersezioni x_1, x_2, procedendo di poi per le successive colonne in maniera perfettamente identica a quella esposta nel caso *a*), fino a pervenire alla determinazione del valore di S corrispondente al valore arbitrario considerato di σ_2.

Mediante interpolazione numerica o grafica resta determinato il valore di σ_2 corrispondente al valore di S (il quale è a sua volta determinato da A) e quindi il corrispondente valore di σ_1 dato da $\sigma_1 = \sigma_2 u$. E con ciò il problema posto è completamente risolto.

c) Vediamo infine come sia possibile dedurre dall'area relativa di transvariazione la differenza tra le medie espressa in funzione della variabilità nell'ipotesi che questa sia la stessa per entrambi i gruppi.

Facendo riferimento al solito sistema cartesiano ortogonale con origine in M_1 $(N_1 \geq N_2)$, dalle equazioni normali delle due distribuzioni :

$$g(x) = \frac{N_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2} \quad , \quad \varphi(x) = \frac{N_2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-M_2}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2}$$

mantenendo i simboli già introdotti, segue la seguente relazione che lega i due scarti ridotti in corrispondenza all'unica intersezione al finito x:

$$\lambda'^2 - \lambda''^2 = \log \frac{N_1}{N_2} \tag{5}$$

D'altra parte, per quanto abbiamo già esposto in precedenza (2, a, caso $\sigma_1 = \sigma_2$), le due distribuzioni non possono presentare

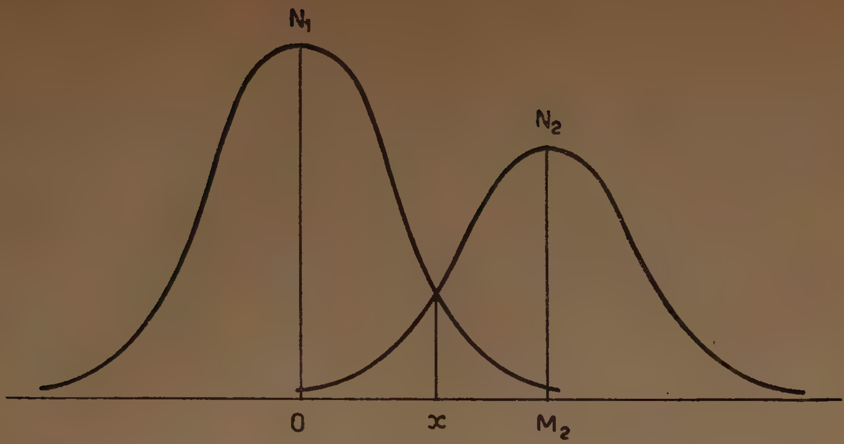


Fig. 12

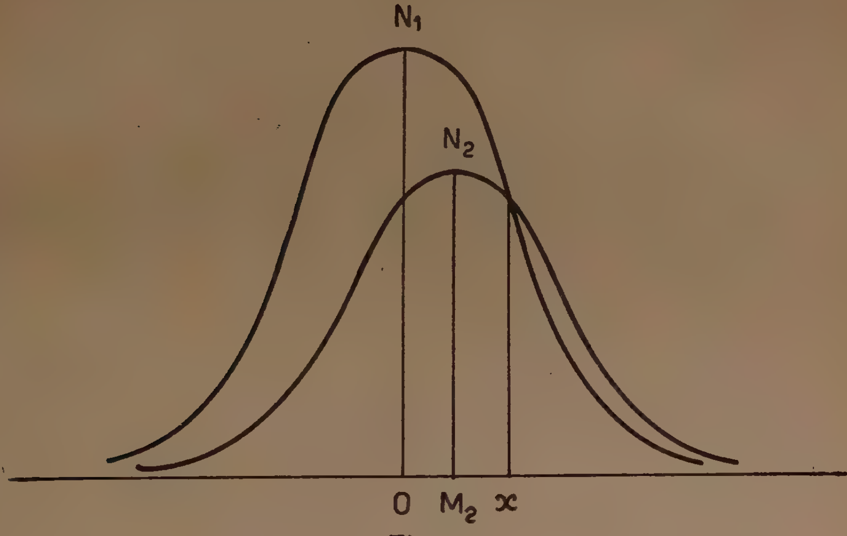


Fig. 13

che i due casi schematizzati nelle figure 12 e 13, per i quali valgono, come sappiamo, le rispettive equazioni:

$$2\,S = N_1\,(1 - v') + N_2\,(1 - v'') \qquad |M_2| > |x| \qquad (\mathrm{I}'')$$

$$2\,S = N_1\,(1 - v') + N_2\,(1 + v'') \qquad |M_2| < |x| \qquad (\mathrm{II}')$$

che possiamo porre nella forma:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 - 2\,S = N_1\,v' + N_2\,v'' \\ N_1 + N_2 - 2\,S = N_1\,v' - N_2\,v'' \end{cases} \qquad \text{ove } S = A\,(N_1 + N_2)/2 \qquad (6)$$

Osserviamo innanzi tutto che, valendo la prima o l'altra delle (6) a seconda che si abbia $|M_2| \gtrless |x|$, è possibile precisare a priori, ossia con i soli dati noti del problema, quale delle due equazioni dobbiamo considerare e quale invece si debba scartare.

È sufficiente per questo considerare il caso intermedio tra i due già schematizzati in figura, ossia il caso in cui M_2 coincide con x (v. fig. 14).

In tale caso la (5) diventa: $(\lambda'' = 0)$

$$\lambda'^2 = \log \frac{N_1}{N_2} \qquad (M_2 = x) \qquad (5')$$

Le (6) si riducono all'unica equazione:

$$N_1 + N_2 - 2\,S = N_1\,v' \qquad (M_2 = x) \qquad (6')$$

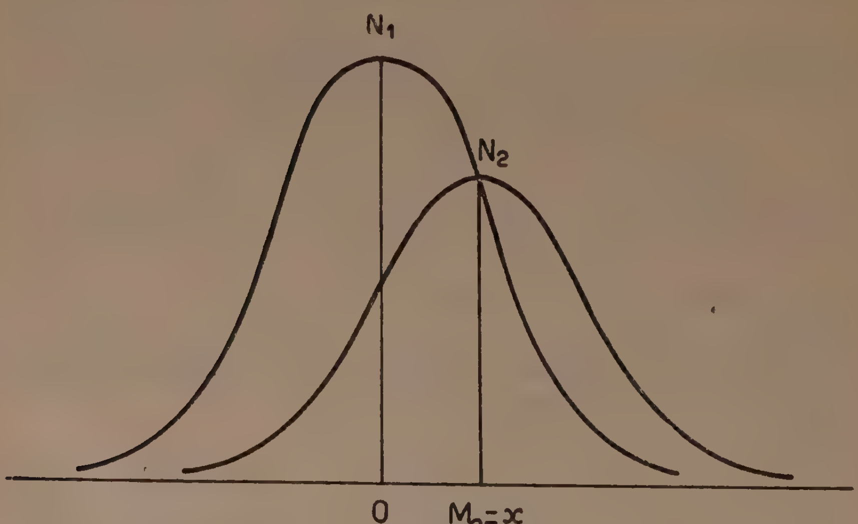


Fig. 14

e le due variabili sono dalla relazione :

$$v' = \Theta(\lambda') .$$

Avremo di conseguenza che, secondo che si verifichi :

$$N_1 + N_2 - 2\,S \gtreqless N_1\,\Theta\left(\sqrt{\log\frac{N_1}{N_2}}\right) \tag{7}$$

sarà :

$$|M_2| \gtreqless |x|$$

e pertanto applicabile rispettivamente la prima delle (6), la (6′) o la seconda delle (6).

L'osservazione suddetta facilita il calcolo pratico come è facile rilevare da quanto passiamo ad esporre.

Si costruisca la seguente tabella :

λ'	λ''	v'	v''	$N_1 v' + N_2 v''$	$N_1 v' - N_2 v''$

e mediante la (7) si verifichi quale delle tre condizioni è verificata. Nel caso che $N_1 + N_2 - 2\,S$ risulti maggiore (minore) di $N_1\,\Theta\left(\sqrt{\log\frac{N_1}{N_2}}\right)$ attribuiremo a λ' valori arbitrari e successivi determinando in corrispondenza nella successiva colonna il valore di λ'' mediante la (5).

Mediante l'integrale di Laplace si passa al solito modo dai valori di λ', λ'' ai v', v''. Ottenuti i valori di v' e v'' basterà calcolare i corrispondenti valori della quinta (sesta) colonna e determinare tra quali due successivi di questi si trovi compreso il valore di $N_1 + N_2 - 2\,S$.

Trovato, mediante interpolazione numerica o grafica, il valore dei λ corrispondenti al valore di $N_1 + N_2 - 2\,S$, tenendo

presente che:

$$\lambda' = \frac{|x|}{\sigma\sqrt{2}}; \quad \lambda'' = \frac{|x - M_2|}{\sigma\sqrt{2}}$$

avremo immediatamente:

$$|M_2| = \sqrt{2}\,\sigma\,(\lambda' + \lambda''); \quad (|M_2| = \sqrt{2}\,\sigma\,(\lambda' - \lambda''))$$

Nel caso poi che risultasse verificata l'uguaglianza nella (7), si avrebbe immediatamente:

$$|M_2| = \sigma \sqrt{2 \log \frac{N_1}{N_2}}$$

Se, in particolare, le due distribuzioni presentano lo stesso numero di casi ($N_1 = N_2 = N$) segue dalla (5):

$$\lambda'^2 - \lambda''^2 = 0$$

onde risulta:

$$\lambda' = \lambda'' = \frac{|M_2|}{2\sqrt{2}\,\sigma} = \lambda$$

mentre la prima delle (6), essendo $|M_2| > |x|$ e $v' = v'' = v$ dà:

$$2\,(N - S) = 2\,N\,v$$

ossia:

$$\left(1 - \frac{S}{N}\right) = v = \Theta\,(\lambda) = \Theta\left(\frac{|M_2|}{2\sqrt{2}\,\sigma}\right)$$

Avremo quindi, nel caso particolare considerato:

$$|M_2| = \chi_0\, 2\sqrt{2}\,\sigma \quad \text{con} \quad \Theta\,(\chi_0) = 1 - \frac{S}{N}$$

III. — L'area relativa di transvariazione quando le due distribuzioni presentano lo stesso numero di casi è stata chiamata dal Gini *rapporto di transvariazione*, e costituisce un'altra costante caratteristica della transvariazione:

$$R = \frac{S}{S_1 + S_2} = \frac{S}{2\,S_1}; \quad (S_1 = S_2)$$

La trattazione dei casi *a*), *b*), *c*), nel caso che la costante di transvariazione considerata sia il rapporto di transvariazione, risulta quindi contenuta, come caso particolare per $N_1 = N_2 = N$, in quanto abbiamo esposto nel caso dell'area relativa di transvariazione. Precisamente si ha :

a) 1°. caso $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

La differenza tra le medie delle due distribuzioni è determinata mediante la prima tabella considerata nel caso 2, *a*)

M_2	x_1	x_2	λ_1'	λ_1''	λ_2'	λ_2''	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	R

in cui x_1 e x_2 sono dati da :

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-\sigma_1^2 M_2 \pm \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + M_2^2}}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

ed R, nell'ultima colonna, è ricavabile dalle :

(I)° $$2R = (2 + v_2' - v_1'' + |v_1' - v_2'|)$$

(II)° $$2R = (2 - v_1'' - v_2'' + v_1' + v_2')$$

(III)° $$2R = (2 - v_1' - v_2'' + |v_1' - v_2'|)$$

(I)°' $$2R = (2 + v_1'' + v_2'' - v_1' - v_2')$$

(II)°' $$2R = (|v_1'' - v_2''| + v_1' + v_2')$$

che tengono rispettivamente il posto delle analoghe che determinavano $2S$.

2°. caso $\sigma_1 = \sigma_2$.

Si è riportati in questo caso a quello particolare trattato per ultimo al numero II c). E risulta :

$$|M_2| = \chi_0 \, 2\sqrt{2}\,\sigma \quad \text{con} \quad \Theta(\chi_0) = 1 - R$$

b) Si deducono le variabilità dei due gruppi dal rapporto di transvariariazione, dalla differenza tra le medie e dal rapporto tra la variabilità dei due gruppi con l'ausilio della tabella già considerata nel caso II, b) :

σ_2	x_1	x_2	λ_1'	λ_1''	λ_2'	$\lambda_{2,}'$	v_1'	v_1''	v_2'	v_2''	R

ove x_1 e x_2 sono dati da :

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-u^2 M_2 \pm u \sqrt{2 (u^2 - 1) \sigma_2^2 \log u + M_2^2}}{1 - u^2} \; ; \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = u$$

mentre R si ricava mediante le equazioni (I)°, (II)°, (III)°, (I)'° (II)'° poco sopra considerate.

c) La differenza tra le medie in funzione della variabilità, supposta la stessa nei due gruppi, è già stata determinata in III, a) caso $\sigma_1 = \sigma_2$.

IV. — L'*intensità di transvariazione I* di due distribuzioni che seguano la legge normale, aventi variabilità σ_1 e σ_2, e medie rispettive M_1 e M_2, è data da :

$$I = e^{-(Hd)^2} - \sqrt{\pi}\,(H\,d)\,[1 - \Theta\,(H\,d)]$$

ove $H = \dfrac{1}{\sqrt{2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$ e $d = M_1 - M_2$ supposto $M_1 \geq M_2$ ed essendo $\Theta\,(x)$ il solito integrale di Laplace.

Posto :

$$z = H\,d = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \tag{8}$$

segue :

$$I = e^{-z^2} - \sqrt{\pi} \cdot z \cdot [1 - \Theta\,(z)] = \left\{ \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - z\,[1 - \Theta\,(z)] \right\} \sqrt{\pi}$$

ed è agevole calcolare, mediante le tavole che forniscono i valori delle funzioni:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \quad , \quad \Theta(z)$$

il valore che assume la I per valori successivi e crescenti di z.

Osserviamo ancora che per gli scopi pratici del problema è sufficiente calcolare i valori di z per $0 \leq z < 3$. Invero $z = 0$ corrisponde alla ipotesi della coincidenza delle medie ($M_1 = M_2$) delle due distribuzioni normali e in tale caso è noto che l'intensità di transvariazione I è massima, mentre va decrescendo col crescere della distanza tra le medie fino ad annullarsi praticamente allorquando la detta distanza assume valori superiori a $3(\sigma_1 + \sigma_2)$ essendo in tale caso le due curve di distribuzione praticamente l'una esterna all'altra e quindi non trasvarianti.

In quest'ultimo caso considerato avremo dunque per z:

$$z = \frac{3(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \tag{8'}$$

Posto $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = t$ abbiamo:

$$z = \frac{3(1 + t)}{\sqrt{2(1 + t^2)}}$$

ed è subito visto che la $z = z(t)$ è crescente per $0 \leq t \leq 1$ e decrescente per $t > 1$ onde ha un massimo per $t = 1$ come del resto poteva dedursi dalla sua derivata prima:

$$z' = \frac{3(1 - t)}{\sqrt{2(1 + t^2)^3}}$$

che appunto si annulla per $t = 1$.

In tale caso ($t = 1$) segue $\sigma_1 = \sigma_2$ e la (8') dà: $z = \frac{6\sigma}{2\sigma} = 3$

Se ne conclude che per gli scopi pratici è sufficiente tabulare la funzione:

$$I = e^{-z^2} - \sqrt{\pi} \cdot z \cdot [1 - \Theta(z)]$$

per valori di z compresi fra zero e 3, corrispondendo a valori di z superiori a tre, valori di I praticamente nulli.

Riportiamo qui la funzione I da noi tabulata per valori di z compresi fra 0 e 2,2 ed il grafico relativo (v. fig. 15). Risulta evidente l'andamento rapidamente decrescente della I per valori interni all'intervallo tra 0 e 1 (onde risulta opportuna in tale intervallo una tabulazione per valori successivi di z differenti di 1/100 anzichè di 1/10) mentre per z compreso tra 1 e 2 la funzione attenua sempre più la decrescenza fino a praticamente annullarsi già per il valore estremo da noi considerato (2,2), avvicinandosi asintoticamente all'asse delle ascisse. Ciò in perfetta corrispondenza da quanto avevamo osservato dall'esame analitico.

$$I = e^{-z^2} - \sqrt{\pi} \cdot z \left[1 - \Theta(z)\right]$$

z	I	Δ	Δ^2
0,0	1,0000000		
0,1	0,8327381	1672612	—
0,2	0,6852444	1474937	197682
0,3	0,5569379	1283066	191871
0,4	0,4468843	1100536	182530
0,5	0,3538551	930292	170244
0,6	0,2763885	774666	155626
0,7	0,2128685	635200	139466
0,8	0,1616012	512673	122527
0,9	0,1208843	407169	105504
1,0	0,0890734	318109	89060
1,1	0,0646330	244404	73705
1,2	0,0461715	184615	59789
1,3	0,0324614	137101	47514
1,4	0,0224570	100044	37057
1,5	0,0152838	71732	28312
1,6	0,0102305	50533	21199
1,7	0,0067339	34966	15567
1,8	0,0043580	23759	11207
1,9	0,0027724	15856	7903
2,0	0,0017336	10388	5468
2,1	0,0010650	6686	3702
2,2	0,0006712	3938	2748

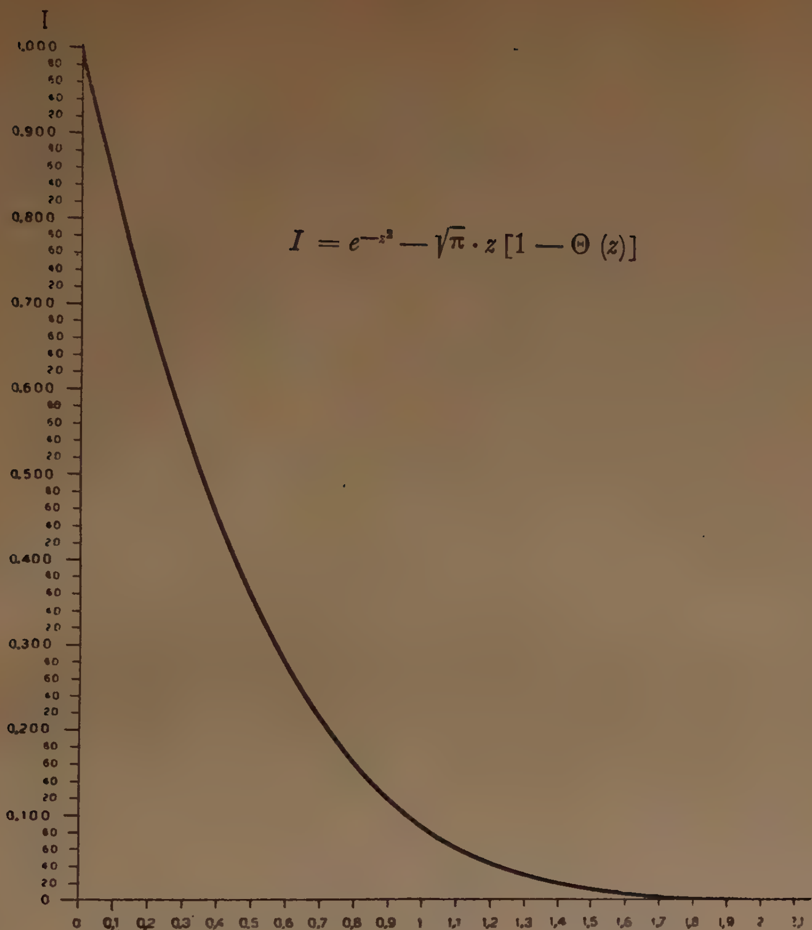


Fig. 15

Dopo quanto abbiamo premesso e in particolare mediante l'uso della tabella annessa, è possibile risolvere con particolare semplicità i casi *a*), *b*) e *c*) in cui si assuma come costante di transvariazione l'*intensità di transvariazione I*.

Invero si ha:

a) Determinato mediante interpolazione dalla nostra tabella il valore z' corrispondente al valore dato di I, avremo:

$$M_1 - M_2 = z' \sqrt{2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

b) Posto $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = u$ avremo:

$$z' = \frac{M_1 - M_2}{\sigma_2 \sqrt{2\,(1 + u^2)}}$$

onde:

$$\sigma_2 = \frac{M_1 - M_2}{z' \sqrt{2\,(1 + u^2)}}; \quad \sigma_1 = u\,\sigma_2 = \frac{u\,(M_1 - M_2)}{z' \sqrt{2\,(1 + u^2)}}$$

c) Essendo $\sigma_1 = \sigma_2$ si ha immediatamente:

$$z' = \frac{M_1 - M_2}{2\,\sigma}; \quad M_1 - M_2 = 2\,\sigma\,z'$$

essendo sempre z' il valore di z corrispondente al valore dato di I.

Un'applicazione di talune formule esposte è stata da noi eseguita relativamente ai dati ricavati da un'inchiesta svolta a mezzo di schede fra gli studenti della Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali dell'Università di Roma. Tale inchiesta mirava a conoscere la valutazione, espressa in punti centesimali, che lo studente faceva di tredici professioni indicate nella scheda (1). Le professioni erano: Avvocati, Ingegneri, Medici, Professori d'Università, Ufficiali, Magistrati, Impiegati statali gruppo A, Farmacisti, Veterinari, Commercianti, Professori di Liceo, Capi di aziende agricole, Capi di aziende industriali. Le

---

(1) Tali dati, con ogni probabilità, non hanno alcun valore intrinseco. L'inchiesta si è prodotta per più anni e i risultati devono perciò risentire dei cambiamenti intervenuti nella situazione economico-sociale del Paese; per di più non si può escludere che qualche volta i punti accordati alle singole professioni non rispecchiano una valutazione seria da parte degli studenti. Li abbiamo scelti per le nostre elaborazioni unicamente perchè l'andamento estremamente irregolare delle distribuzioni ci permette di verificare l'applicabilità delle formule in un caso limite nel quale l'ipotesi della normalità è del tutto irreale. Ciò corrisponde bene agli scopi di questa ricerca, in quanto i risultati positivi ottenuti in condizioni così sfavorevoli hanno naturalmente un valore probatorio molto elevato.

schede raccolte furono in numero di trecentotrenta e lo spoglio fornì i risultati riportati nella tabella seguente :

TABELLA I

	PROFESSIONI	M_e	M	σ
1	Medici	81,086	73,909	25,750
2	Profess. Università	79,025	68,681	26,375
3	Ingegneri	77,892	69,136	29,550
4	Capi aziende ind.	69,687	64,651	26,335
5	Magistrati	61,195	57,439	27,335
6	Capi aziende agric.	59,583	56,772	29,490
7	Avvocati	51,686	51,136	28,310
8	Prof. Liceo	49,388	47,106	27,930
9	Ufficiali	39,285	41,621	29,655
10	Impiegati Statali (A)	39,078	39,454	28,905
11	Commercianti	38,981	42,121	28,015
12	Farmacisti	38,809	38,348	24,680
13	Veterinari	30,555	33,924	24,655

In essa M_e e M indicano rispettivamente la mediana e la media aritmetica dei punti accordati alle singole professioni e σ lo scarto quadratico medio delle relative distribuzioni.

Abbiamo ordinato le varie professioni secondo il valore decrescente del voto mediano (tab. I) ed abbiamo calcolato la probabilità di transvariazione che ciascuna d'esse presenta rispetto a tutte le altre che la precedono nella graduatoria. I risultati cui siamo pervenuti sono raccolti nella tabella II.

Dai valori della probabilità di transvariazione abbiamo dedotto, nel modo indicato in 1) c), la differenza tra le medie aritmetiche delle varie coppie di distribuzioni transvarianti : differenza teorica, dedotta nell'ipotesi che i voti relativi alle singole professioni si distribuissero secondo la legge normale, e prendendo per σ comune la media aritmetica dei σ (27,460).

Probabilità di transvariazione

Tabella II

	13 Veterinari	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12 Farmacisti	0,891753	Farmacisti										
11 Commercianti	0,836033	0,935298	Commerc.									
10 Imp. statali	0,901992	0,993067	1,059118	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,863149	0,956464	1,017098	0,962167	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,725867	0,814921	0,892956	0,842929	0,882075	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,631524	0,719834	0,807744	0,756932	0,799311	0,917355	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,548484	0,625022	0,710027	0,667419	0,707217	0,801285	0,880091	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,548255	0,620606	0,704481	0,658503	0,700853	0,792589	0,862773	0,979889	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,414857	0,477015	0,565114	0,528925	0,569678	0,647052	0,708732	0,834710	0,860183	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,344426	0,397869	0,4849035	0,451799	0,494132	0,554132	0,554187	0,607465	0,738686	0,900716	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,382892	0,434554	0,510385	0,476299	0,517575	0,570633	0,619595	0,739228	0,76102	0,887061	0,974894	Professori d'Univ.
1 Medici	0,284417	0,328842	0,408374	0,381221	0,421469	0,463948	0,508117	0,635160	0,661946	0,786767	0,878852	0,914022
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistrati 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

Differenze tra le medie aritmetiche dei gruppi transvarianti — TABELLA III

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistrati	4 Capi az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	4,42 *5,29*											
11 Commercianti	8,20 *8,04*	3,77 *3,12*										
10 Imp. statali	5,53 *4,78*	1,11 *0,34*	2,67 *2,88*									
9 Ufficiali	7,70 *6,70*	3,27 *2,12*	0,50 *0,83*	2,17 *1,84*								
8 Prof. liceo	13,18 *13,62*	8,76 *9,59*	4,99 *5,23*	7,65 *7,75*	5,49 *5,76*							
7 Avvocati	17,21 *18,63*	12,79 *13,93*	9,02 *9,47*	11,68 *12,02*	9,52 *9,88*	4,03 *4,03*						
6 Capi az. agric.	22,85 *23,30*	18,42 *18,98*	14,65 *14,44*	17,32 *16,69*	15,15 *14,59*	9,67 *9,77*	5,64 *5,86*					
5 Magistrati	23,52 *23,32*	19,09 *19,22*	15,32 *14,73*	17,99 *17,16*	15,82 *14,92*	10,33 *10,21*	6,30 *6,71*	0,67 *0,98*				
4 Capi az. ind.	30,73 *31,65*	26,30 *27,62*	22,53 *22,34*	25,20 *24,45*	23,03 *22,08*	17,55 *17,78*	13.52 *14,51*	7,88 *8,10*	7,21 *6,84*			
3 Ingegneri	35,21 *36,72*	30,79 *32,83*	27,02 *27,12*	29,69 *29,22*	27,52 *26,55*	22,03 *22,97*	18,00 *19,95*	12,36 *12,96*	11,70 *11,65*	4,49 *4,84*		
2 Prof. d'Univ.	34,76 *33,89*	30,33 *30,35*	26,56 *25,56*	29,23 *27,66*	27,06 *25,13*	21,58 *22,02*	17,55 *19,28*	11,91 *12,93*	11,24 *11,81*	4,03 *5,52*	0,46 *1,22*	
1 Medici	39,99 *41,57*	35,56 *37,92*	31,79 *32,11*	34,46 *34,00*	32,29 *31,22*	26,80 *28,44*	22,77 *25,70*	17,14 *18,43*	16,47 *16,98*	9,26 *10,51*	4,77 *5,92*	5,23 *4,19*
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Cap. az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

In corsivo: valori teorici. In tondo: valori effettivi.

Tale differenza teorica l'abbiamo messa a confronto con la differenza tra le medie aritmetiche effettivamente riscontrata nelle varie coppie di distribuzioni transvarianti ed i risultati cui siamo pervenuti sono raccolti nella tabella III.

Nella tabella IV abbiamo indicato la differenza algebrica tra il valore effettivo e quello teorico:

Risulta da essa che:

In 29 casi su 78 (pari al 37,18 %) il valore effettivo è superiore a quello teorico, in un caso i due valori coincidono, nei rimenenti 48 casi (61,54 %) il valore teorico supera quello effettivo.

Le differenze assolute tra i valori teorici ed effettivi non sono mai superiori a 3 unità; 75 di esse (96,15 %) sono inferiori a 2 unità, 55 di esse (70,51 %) non superano l'unità.

I valori della probabilità di transvariazione risultano sempre inferiori all'unità ad eccezione dei due relativi alla transvariazione tra Impiegati statali e Commercianti e tra Ufficiali e Commercianti.

D'altra parte è noto (1) che tale costante di transvariazione può eccedere il valore dell'unità allorquando i due gruppi tra i quali è calcolata danno luogo a curve di frequenza asimmetriche (2).

Come si vede dai grafici delle figg. 16-28, tutte le distribuzioni sono più o meno asimmetriche. Meno asimmetriche sono quelle per le professioni che nelle graduatorie dei voti medi o mediani figurano ai posti centrali e più asimmetriche quelle che figurano ai posti estremi.

Vi è — dobbiamo domandarci — una speciale ragione che determina nei due casi accennati l'anomalia segnalata delle probabilità di transvariazione?

Esaminando la tav. 1ª si avverte come per queste due coppie di professioni le differenze tra le medie aritmetiche si verifichino in senso inverso a quelle tra le rispettive mediane. In altre parole, se la graduatoria fosse stata stabilita tra queste professioni in base al voto medio, anzichè in base al voto mediano,

---

(1) Cfr. Gini: *Memorie di metodologia statistica*, pag. 523-526.

(2) Essa risulta però sempre inferiore al valore di 3/2, massimo che può venire raggiunto quando le curve di frequenza dei due gruppi presentano quella particolarissima disposizione per cui vengono dette « equi-incastrate ».

Differenze tra i valori effettivi e i teorici

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	—0,87	Farmacisti										
11 Commercianti	0,16	0,65	Commerc.									
10 Imp. statali	0,75	0,77	—0,21	Imp. stat.								
9 Ufficiali	1	1,15	—0,33	0,33	Ufficiali							
8 Prof. liceo	—0,44	—0,83	—0,24	—0,10	—0,27	Prof. liceo						
7 Avvocati	—1,42	—1,14	—0,45	—0,34	—0,36	—	Avvocati					
6 Capi az. agric.	—0,45	—0,56	0,21	0,63	0,56	—0,10	—0,22	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,20	—0,13	0,59	0,83	0,88	0,12	—0,41	—0,31	Magistrati			
4 Capi az. ind.	—0,92	—1,32	0,19	0,75	0,95	—0,23	—0,99	—0,22	0,37	Cap. az. ind.		
3 Ingegneri	—1,51	—2,04	—0,10	0,47	0,97	—0,94	—1,95	—0,60	0,05	—0,35	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,87	—0,02	1	1,57	1,93	—0,44	—1,73	—1,02	—0,57	—1,49	—0,76	Professori d'Univ.
1 Medici	—1,58	—2,36	—0,32	0,46	1,07	—1,64	—2,93	—1,29	—0,51	—1,25	—1,15	1,04
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Cap. az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

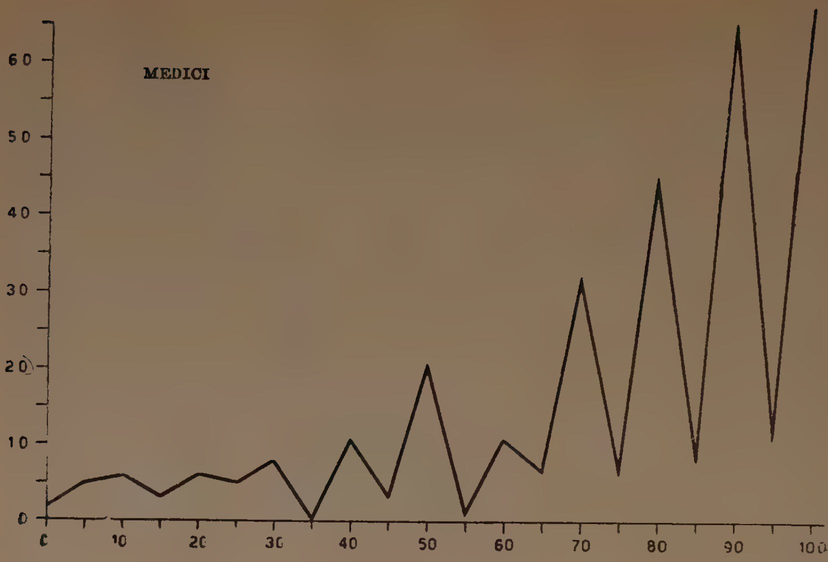

MEDICI
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Fig. 16

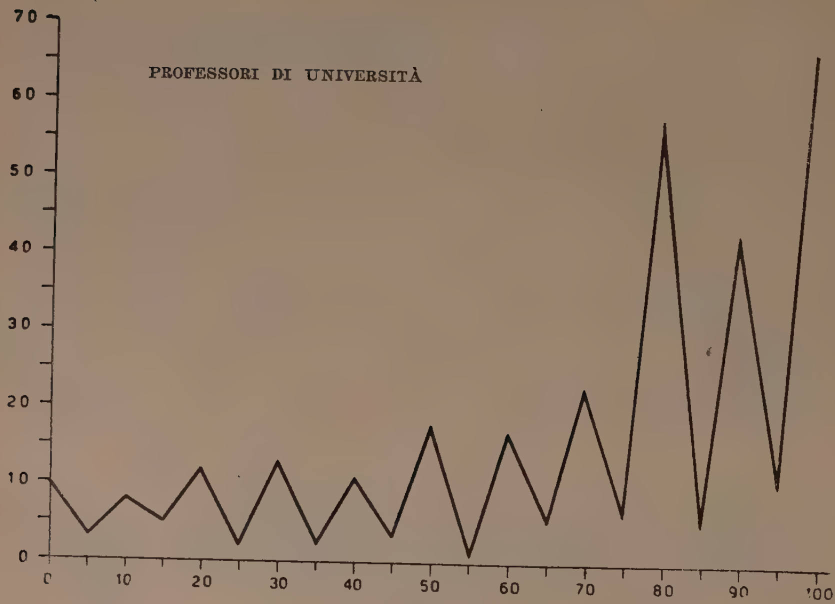

PROFESSORI DI UNIVERSITÀ
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Fig. 17

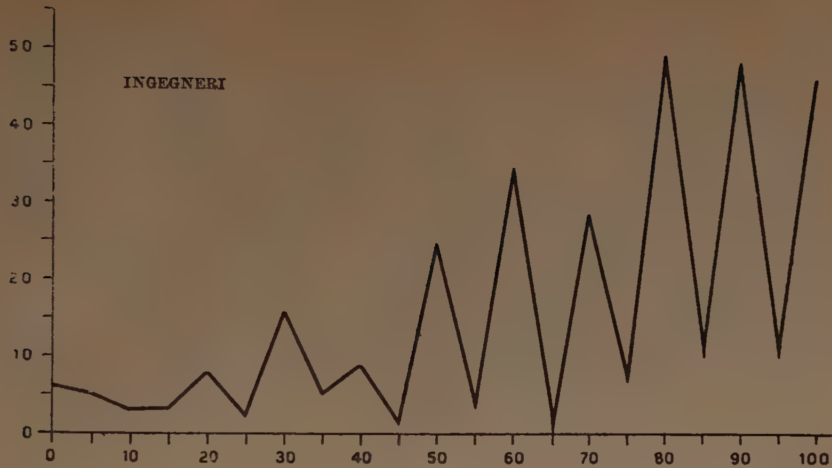


Fig. 18

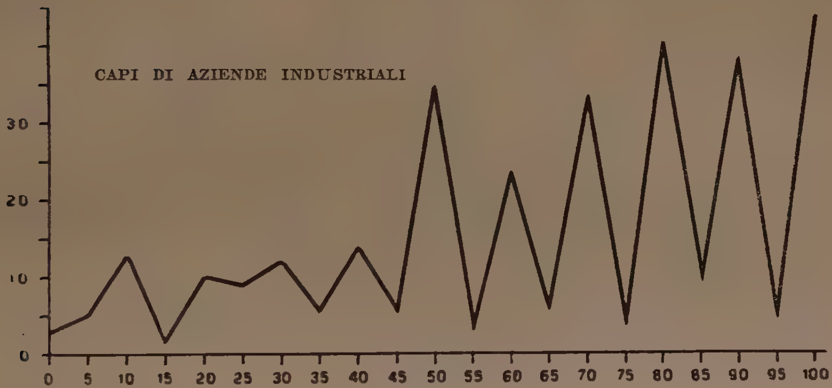


Fig. 19

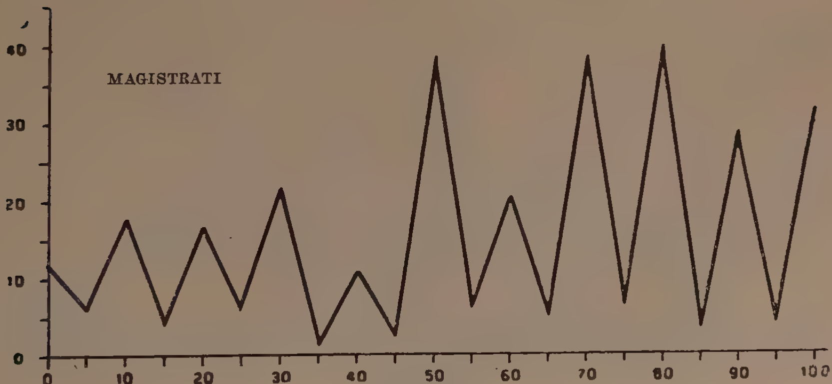


Fig. 20

Fig. 21

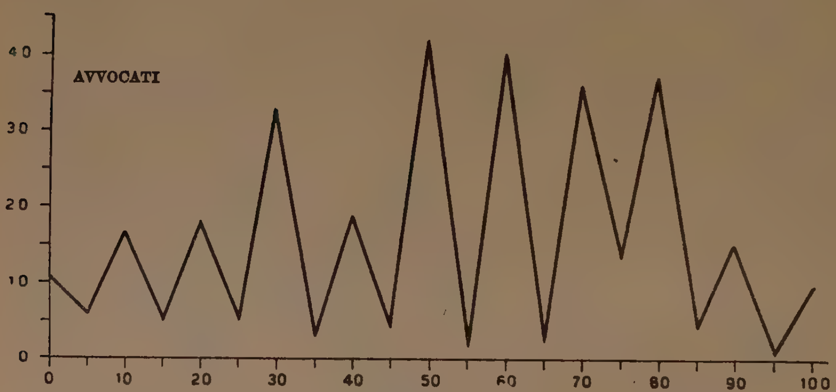


Fig. 22

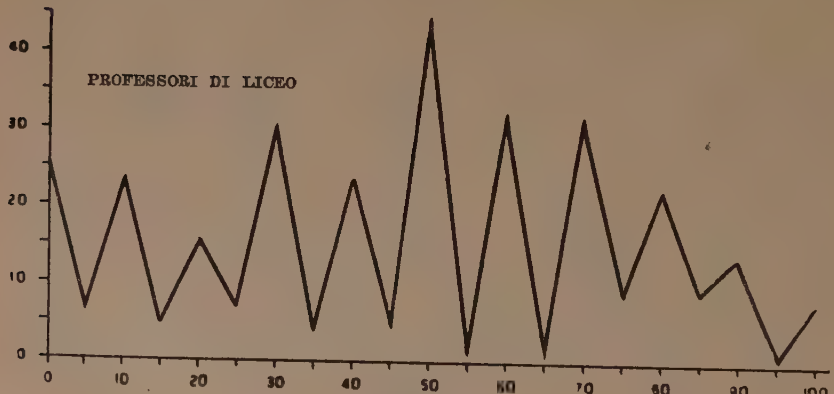


Fig. 23

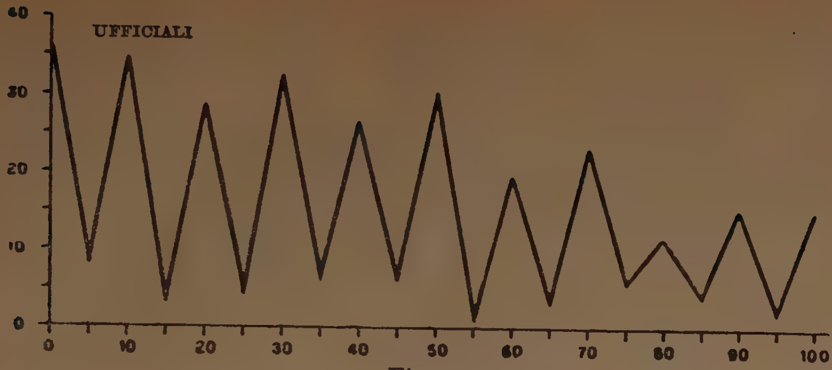


Fig. 24

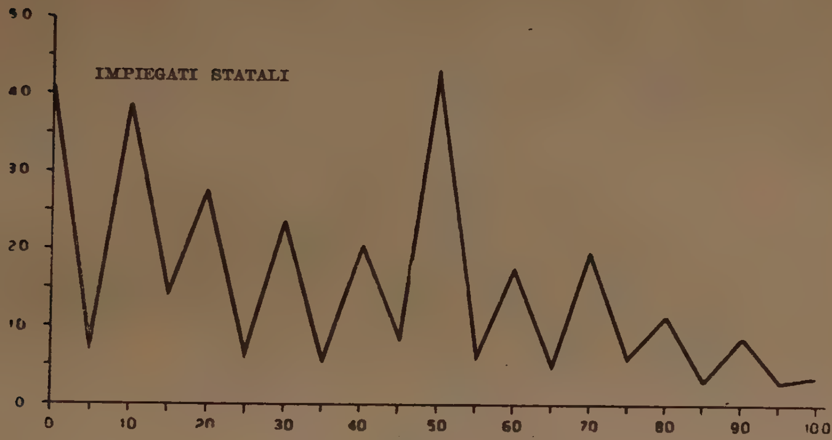


Fig. 25

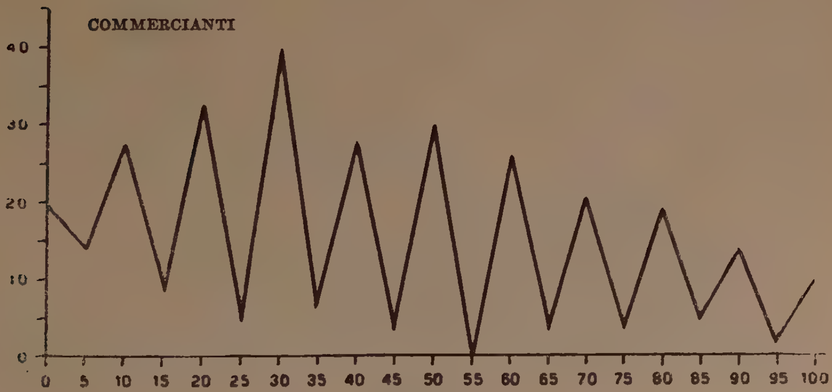


Fig. 26

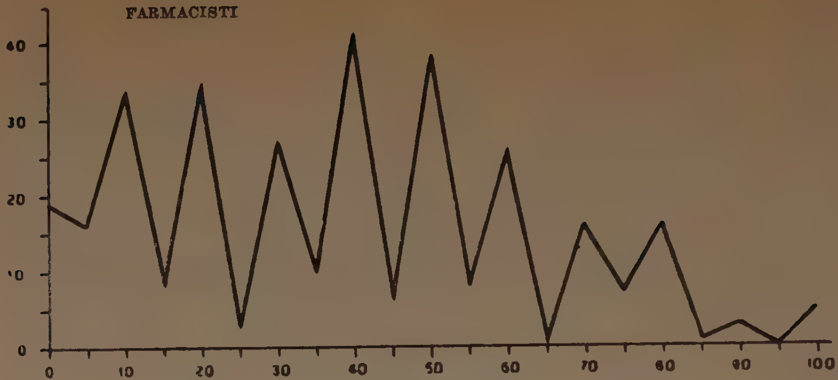


Fig. 27

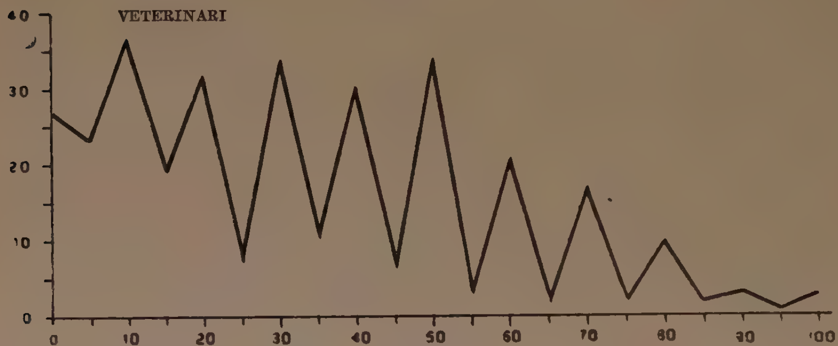


Fig. 28

anche per esse si sarebbe ottenuto una probabilità di transvariazione inferiore all'unità.

In realtà, poichè tutte le nostre elaborazioni partivano dall'ipotesi che la distribuzione fosse normale e, per questa, la mediana equivale alla media aritmetica, i due procedimenti sarebbero stati ugualmente autorizzati. Il risultato ottenuto attesta che la « resistenza all'anormalità » dell'ipotesi della legge normale risulta maggiore quando ci si basa sulla media aritmetica che quando ci si basa sulla mediana.

Su questo punto avremo occasione di ritornare.

I valori teorici risultano più spesso superiori che inferiori agli effettivi. In complesso però, l'accordo tra gli uni e gli altri è soddisfacente e il risultato è degno di rilievo perchè nessuna delle distribuzioni in esame — tutte plurimodali — ha la minima somiglianza con la distribuzione normale. Non è soddisfatta

cioè l'ipotesi fondamentale in base a cui le formule sono state stabilite e, ciò nonostante, le formule stesse possono essere utilmente impiegate.

Assistiamo così ad una manifestazione della ben nota « resistenza alle anomalie » della ipotesi della legge normale (1) per cui i risultati trovati nell'ipotesi di tale distribuzione rimangono veri, con ottima approssimazione, anche quando la distribuzione effettiva si discosta molto da tale ipotesi.

Noi possiamo pertanto attribuire alle formule stabilite una portata assai più ampia di quella che a loro competerebbe per l'ipotesi restrittiva della normalità in base a cui sono state ottenute.

Si osservi che, se paragonassimo i valori teorici con la effettiva differenza delle *mediane*, anzichè delle *medie*, l'accordo

(1) Anche in altri campi si incontrano simili « resistenze alle anomalie »; ed è noto il teorema di Pascal, illustrato nella figura 29, la cui resistenza grafica è grandissima risultando i punti L,M,N, allineati comunque si faccia male la figura dell'elissi.

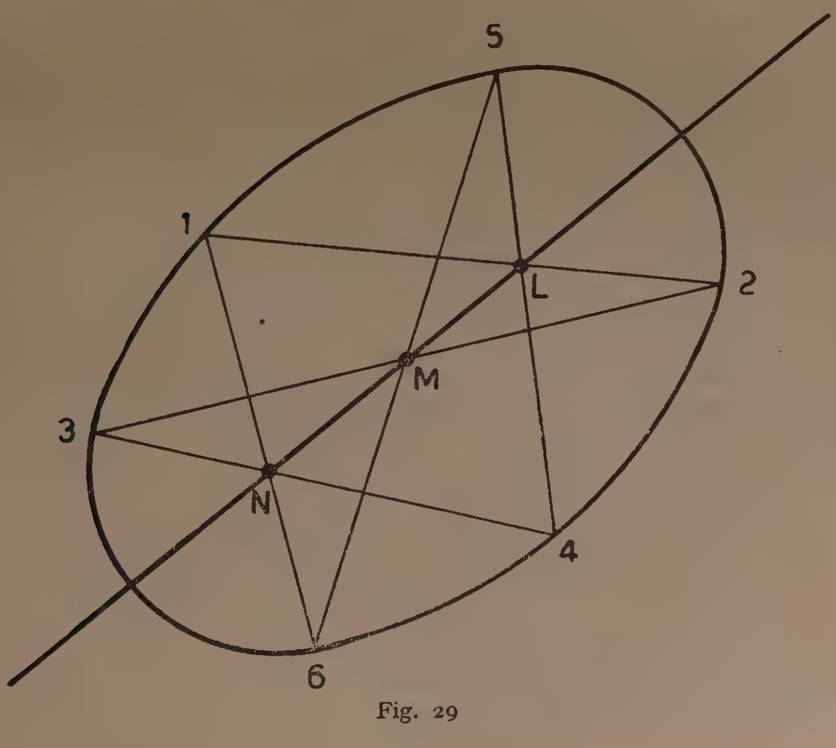


Fig. 29

non sarebbe così buono come quello sopra riscontrato. Sta qui un'attiva riprova al fatto di comune osservazione, e sopra confermato, che la « resistenza alle anomalie » della legge normale riguarda la media più che la mediana.

Dall'ultima tabella appare chiaro come l'accordo tra valori teorici ed effettivi, quasi perfetto per le distribuzioni centrali, decresca allontanandosi da esse. Ciò può mettersi in relazione col fatto, già rilevato, che le distribuzioni dei voti delle varie professioni presentano un andamento più asimmetrico per le professioni che, nelle graduatorie statistiche secondo i valori crescenti o decrescenti del valore mediano (vedi tav. 1), risultano ai primi e agli ultimi posti e meno asimmetrico per quelle che risultano ai posti centrali.

A proposito di quest'ultima osservazione potrebbe tuttavia nascere il dubbio che si tratti di una correlazione spuria, in quanto le coppie centrali, per le quali gli scarti tra valori effettivi e valori teorici sono minori, in valore assoluto, hanno in generale anche i valori effettivi più bassi. La questione si collega con quella relativa al procedimento più corretto per misurare la differenza tra due percentuali. È da prendere la differenza assoluta ? Non pare. Ma ragguagliandola ad una delle due percentuali o alla loro media si incorre pure in inconvenienti, in quanto i risultati sono diversi a seconda che si consideri la percentuale o il suo valore complementare. Per ovviare a questo inconveniente, conviene ragguagliare la differenza ad un valore in cui la percentuale e il suo valore complementare figurino simmetricamente.(1)

In base a queste considerazioni abbiamo calcolato le espressioni $\left|\dfrac{d - d'}{\sqrt{d\,(100 - d)}}\right|$ che potremo chiamare *valori ridotti delle differenze assolute* dove d rappresenta il valore effettivo della differenza fra le medie e d' il valore teorico. I risultati sono riportati nella seguente tabella V.

Dalla tabella risulta che anche questi valori sono, sia pure leggermente, più bassi per le coppie centrali che non per le altre. Ciò è confermato dall'indice semplice di cograduazione tra la gra-

(1) Cfr. C. Gini. *Memorie di Metodologia statistica.* Giuffrè, Milano, 1939, pp. 588 sgg. Veschi, Roma, 1955.

Valori ridotti delle differenze assolute fra valori effettivi e valori teorici di d. **Tabella V**

	13 Veterinari	12	11	10	9	8	7		5	4	3	2
12 Farmacisti	0,04232	Farmacisti										
11 Commercianti	0,00588	0,03413	Commerc.									
10 Imp. statali	0,03281	0,07349	0,01303	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,03751	0,06466	0,04679	0,02265	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,01301	0,02936	0,01102	0,00376	0,01185	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,03762	0,03413	0,01571	0,01059	0,01227	0,00000	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,01072	0,01446	0,00594	0,01665	0,01562	0,00338	0,00954	Capi az. agr.				
5 Magistrati	0,00472	0,00331	0,01638	0,02161	0,02411	0,00394	0,01687	0,03800	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,01994	0,02998	0,00455	0,01727	0,02256	0,00605	0,02895	0,00817	0,01430	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,03161	0,04419	0,00225	0,01029	0,02172	0,02268	0,05076	0,01823	0,00156	0,01690	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,01827	0,00044	0,02264	0,03452	0,04344	0,01070	0,04548	0,03149	0,01805	0,07576	0,11231	Professori d'Univ.
1 Medici	0,03225	0,04884	0,00687	0,00968	0,02288	0,03703	0,06987	0,03423	0,01375	0,04312	0,05396	0,04671
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

duatoria crescente di questi valori e la graduatoria che si ottiene ordinando le coppie di professioni secondo i valori crescenti della somma dei valori assoluti delle differenze tra la media aritmetica dei punti accordati ad ogni professione e la media aritmetica generale. Tale indice risulta 0,315. Per gli scarti assoluti, tale indice risulta = 0,346, cioè di poco più elevato.

Possiamo quindi concludere che in effetti l'approssimazione è alquanto migliore per le coppie formate da professioni che hanno una distribuzione meno asimmetrica.

Abbiamo calcolato anche le *intensità di transvariazione* tra i vari gruppi, per dedurre, nel modo indicato nel paragrafo IV, la differenza teorica tra le medie aritmetiche, sempre prendendo come σ comune la media aritmetica di tutti σ e, come è stato fatto per le probabilità di transvariazione, abbiamo confrontato i valori teorici così ottenuti coi valori effettivi. I risultati sono riportati nelle tabelle VI, VII, VIII.

Dall'ultima tabella risulta :

In 45 casi su 78 (pari al 57,69 %) il valore effettivo è superiore a quello teorico, nei rimanenti 33 casi (42,31 %) il valore teorico supera quello effettivo.

Le differenze assolute tra i valori teorici ed effettivi non sono mai superiori a 5 unità, 73 di esse (93,59 %) sono inferiori a 3 unità, 65 (83,33 %) sono inferiori a 2 unità, 52 (66,67 %) non superano l'unità.

Contrariamente a quanto abbiamo riscontrato per i valori dedotti dalle probabilità di transvariazione, i valori effettivi risultano qui più spesso superiori che inferiori ai valori teorici. La differenza tra il numero degli scarti positivi e quello degli scarti negativi è per altro meno accentuata.

Le differenze assolute tra valori risultano in media leggermente più elevate che non nel caso delle probabilità di transvariazione ; nel complesso, tuttavia, l'accordo può essere considerato soddisfacente anche in questo caso.

Anche per questi scarti abbiamo voluto calcolare le espressioni $\left| \frac{d - d'}{\sqrt{d\,(100 - d)}} \right|$ ottenendo risultati riportati nella Tabella IX.

Si vede subito che le differenze tra i valori ridotti per le coppie centrali e per le coppie esterne sono meno accentuate che non nel

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	0,8475456	Farmacisti										
11 Commercianti	0,7459768	0,84362622	Commerc.									
10 Imp. statali	0,8235575	0,9617808	0,9174113	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,7722809	0,880751	0,9828995	0,9332122	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,6373304	0,7498797	0,8422645	0,7708692	0,8426972	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,5348248	0,6289807	0,7405993	0,6786050	0,7600949	0,8664984	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,4067141	0,5187876	0,6175603	0,5672814	0,6226738	0,7306661	0,8276923	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,4355058	0,5193654	0,6108755	0,5621121	0,6094265	0,7201788	0,8087542	0,9787406	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,3316893	0,3804738	0,4647494	0,385958	0,4596838	0,5470849	0,6226873	0,7692648	0,7778152	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,2310827	0,3144733	0,3860300	0,3605780	0,3906214	0,4562987	0,5240801	0,6570141	0,6694079	0,8456408	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,2997998	0,3579394	0,4205994	0,3953320	0,4086956	0,4751748	0,5660725	0,6847557	0,6662947	0,8726653	0,9906823	Professori d'Univ.
1 Medici	0,2211499	0,2617299	0,3185563	0,3101497	0,3224961	0,4014256	0,4879343	0,5417634	0,5620635	0,7078663	0,8355716	0,8214990
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Differenze tra le medie aritmetiche dei gruppi transvariati — TABELLA VII

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistrati	4 Capi az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	4,42 *5,07*											
11 Commercianti	8,20 *8,75*	3,77 *5,20*										
10 Imp. statali	5,53 *5,91*	1,11 *1,26*	2,67 *2,44*									
9 Ufficiali	7,70 *7,79*	3,27 *3,96*	0,50 *0,56*	2,17 *2,21*								
8 Prof. liceo	13,18 *13,04*	8,76 *8,61*	4,99 *5,25*	7,65 *7,84*	5,49 *5,23*							
7 Avvocati	17,21 *17,61*	12,79 *13,40*	9,02 *8,95*	11,68 *11,26*	9,52 *8,23*	4,03 *4,44*						
6 Capi az. agric.	22,85 *24,34*	18,42 *18,41*	14,65 *13,89*	17,32 *16,06*	15,15 *15,67*	9,67 *9,31*	5,64 *5,76*					
5 Magistrati	23,52 *22,66*	19,09 *18,38*	15,32 *14,18*	17,99 *16,28*	15,82 *14,24*	10,33 *9,70*	6,30 *6,45*	0,67 *0,70*				
4 Capi az. ind.	30,73 *29,01*	26,30 *25,87*	22,53 *21,10*	25,20 *25,55*	23,03 *21,35*	17,55 *17,00*	13,52 *13,67*	7,88 *7,89*	7,21 *7,54*			
3 Ingegneri	35,21 *36,93*	30,79 *30,25*	27,02 *25,54*	29,69 *27,03*	27,52 *25,27*	22,03 *21,52*	18,00 *18,14*	12,36 *12,19*	11,70 *11,66*	4,49 *5,13*		
2 Prof. d'Univ.	34,76 *31,31*	30,33 *27,18*	26,56 *23,53*	29,23 *25,00*	27,06 *24,22*	21,58 *20,58*	17,55 *16,11*	11,91 *11,00*	11,24 *11,80*	3,03 *4,23*	0,46 *0,30*	
1 Medici	39,99 *37,79*	35,56 *34,28*	31,79 *29,96*	34,46 *30,56*	32,29 *29,67*	26,80 *24,64*	22,77 *19,94*	17,14 *17,26*	16,47 *16,28*	9,26 *10,15*	4,77 *5,47*	5,23 *5,98*
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Cap. az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

In corsivo: valori teorici (calcolati in base all'intensità di transvariazione). In tondo: valori effettivi.

Differenze fra i valori effettivi e i valori teorici — TABELLA VIII

	13 Veterinari											
12 Farmacisti	—0,65	12 Farmacisti										
11 Commercianti	—0,55	—1,43	11 Commerc.									
10 Imp. statali	—0,38	—0,15	—0,07	10 Imp. stat.								
9 Ufficiali	—0,09	—0,69	—0,06	—0,04	9 Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,14	0,15	—0,26	—0,19	0,26	8 Prof. liceo						
7 Avvocati	—0,40	—0,61	0,07	0,42	1,29	—0,41	7 Avvocati					
6 Capi az. agric.	—1,49	0,01	0,76	1,26	—0,52	0,36	—0,12	6 Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,86	0,71	1,14	1,71	1,58	0,63	—0,15	—0,03	5 Magistrati			
4 Capi az. ind.	1,72	0,43	1,43	—0,35	2,68	0,55	—0,15	—0,01	—0,33	4 Capi az. ind.		
3 Ingegneri	—1,72	0,54	1,48	2,66	2,25	0,51	—0,14	0,17	0,04	—0,64	3 Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	3,25	3,15	3,03	4,23	2,84	1,00	1,44	0,91	—0,56	—0,20	0,16	2 Professori d'Univ.
1 Medici	2,20	0,28	1,83	3,90	2,62	2,16	2,87	—0,12	0,19	—0,89	—0,70	—0,75
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

Valori ridotti delle differenze fra valori effettivi e valori teorici d — d'. **Tabella IX**

	13 Veterinari	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12 Farmacisti	0,03155	Farmacisti										
11 Commercianti	0,02023	0,07508	Commerc.									
10 Imp. statali	0,01663	0,01432	0,00434	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,00338	0,03880	0,00851	0,00275	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,00414	0,00531	0,01194	0,00715	0,01141	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,01060	0,01826	0,00244	0,01308	0,04395	0,01777	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,03549	0,00026	0,02149	0,03329	0,01450	0,01218	0,00520	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,02028	0,01807	0,03165	0,04452	0,04330	0,02070	0,00617	0,00368	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,03728	0,00977	0,03423	0,00806	0,06365	0,01446	0,00439	0,00037	0,01276	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,03601	0,01170	0,03333	0,05822	0,05038	0,01231	0,00364	0,00517	0,00124	0,03091	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,06825	0,06853	0,06861	0,09300	0,06393	0,02431	0,03786	0,02809	0,01773	0,01017	0,02365	Professori d'Univ.
1 Medici	0,04491	0,00579	0,03930	0,08206	0,05603	0,04877	0,06844	0,00318	0,00512	0,03070	0,03284	0,03369
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

caso dei valori ricavati dalle *probabilità* di transvariazione. Ciò è anche confermato dal fatto che ora l'indice semplice di cograduazione tra questi valori e le somme dei valori assoluti delle differenze tra le medie artitmetiche dei punti accordati alle singole professioni e la media aritmetica generale è pari a 0,138, (per gli scarti assoluti l'indice è = 0,288) mentre per i valori ricavati dalla *probabilità* di transvariazione era di 0,315.

Abbiamo dedotto la differenza tra le medie aritmetiche delle distribuzioni transvarianti anche partendo da una terza costante di transvariazione e cioè dal rapporto di transvariazione, seguendo il procedimento indicato in II *c*) e prendendo come scarto quadratico medio la media aritmetica degli scarti quadratici medi relativi alle 13 distribuzioni. Le differenze tra i valori teorici così ricavati e gli effettivi sono riportate nella tabella X.

Risulta da essa che:

a) I valori teorici risultano sempre superiori ai valori effettivi

b) in 2 casi lo scarto tra i due valori è inferiore a 1

in 33 casi lo scarto tra i due valori è inferiore a 4

in 58 casi lo scarto tra i due valori è inferiore a 6

in 71 casi lo scarto tra i due valori è inferiore a 8

c) Tale scarto raggiunge un massimo di 13,02.

È da tener presente, nel giudicare dell'accordo o meno tra i valori teorici ed effettivi, che il limitato numero di casi (330) influisce notevolmente sulle deduzioni possibili dal rapporto di transvariazione.

L'ultima tabella ci consente di esaminare per ogni coppia di professioni le concordanze o discordanze di segno degli scarti fra i valori effettivi di *d* e i valori teorici dedotti dalle varie costanti di transvariazione. Risulta direttamente da esse che, tra probabilità e intensità di transvariazione si hanno 39 concordanze (tra cui 18 di segno + e 21 di segno —) e 39 discordanze. Le concordanze e discordanze tra probabilità o intensità di transvariazione da un lato e rapporto di transvarazione dall'altro, si ricavano immediatamente, ricordando che per quest'ultima costante gli scarti sono sempre negativi. Otteniamo così che tra probabilità di transvariazione e rapporto di transvarazione vi sono 48 con-

Tabella X

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	—5,22	Farmacisti										
11 Commercianti	—2,72	—7,15	Commerc.									
10 Imp. statali	—5,60	—13,02	—8,67	Imp. stat.								
9 Ufficiali	—2,37	—10,21	—7,45	—6,21	Ufficiali							
8 Prof. liceo	—3,55	—7,32	—4,87	—5,62	—6,49	Prof. liceo						
7 Avvocati	—3,50	—6,36	—4,46	—5,27	—6,56	—2,24	Avvocati					
6 Capi az. agric.	—1,96	—3,42	—1	—2,06	—0,93	—4,46	—4,64	Capi az. agric.				
5 Magistrati	—2,45	—5,25	—4,28	—0,72	—2,89	—4,23	—5,26	—9,19	Magistrati			
4 Capi az. ind.	—2,72	—4,92	—2,74	—1,23	—1,78	—2,49	—5,19	—5,82	—3,07	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	—5,59	—5,99	—3,23	—3,76	—3,21	—3,47	—4,29	—3,94	—5,03	—5,37	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	—3,87	—7,50	—3,45	—2,48	—2,70	—7,70	—8,18	—5,26	—3,11	—3,35	—10,88	Professori d'Univ.
1 Medici	—6,23	—9,48	—4,73	—3,90	—3,45	—5,66	—6,75	—6,52	—3,35	—4,01	—7,21	—5,26
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

I seguenti prospetti riassumono i risultati cui siamo pervenuti partendo dalle tre costanti di transvariazione considerate.

Differenze tra valori effettivi e valori teorici di $d = A_i - A_j$

Classi	Probabilità frequenze	Intensità frequenze	Rapporto frequenze
−11, −13,5			1
−10,5 −11			1
−10, −10,5			1
− 9,5 −10			
− 9, − 9,5			2
− 8,5 − 9,			1
− 8, − 8,5			1
− 7,5 − 8			1
− 7, − 7,5			5
− 6,5 − 7			3
− 6, − 6,5			4
− 5,5 − 6			6
− 5, − 5,5			9
− 4,5 − 5			4
− 4, − 4,5			6
− 3,5 − 4			5
− 3, − 3,5			11
− 2,5 − 3	1		5
− 2, − 2,5	2		6
− 1,5 − 2	5	1	2
− 1, − 1,5	8	2	1
− 0,5 − 1	10	10	3
0, − 0,5	22	20	
0, 0,5	11	11	
0,5 1	14	11	
1, 1,5	3	6	
1,5 2	2	4	
2, 2,5		3	
2,5 3		5	
3, 3,5		3	
3,5 4,		1	
4, 4,5		1	
	78	78	78

Costanti di transvariazione

Probabilità

In 48 casi (su 78) il valore *teorico* è superiore all'effettivo.

Le differenze assolute tra valore effettivo e teorico sono :
inferiori ad 1 in 55 casi
inferiori a 2 in 75 casi

La differenza assoluta massima è 2,93.

Intensità

In 45 casi (su 78) il valore *effettivo* supera il teorico.

Le differenze assolute tra valore effettivo e teorico sono :
inferiori ad 1 in 51 casi
inferiori a 2 in 65 casi

La differenza assoluta massima è 4,23

Rapporto

Il valore *teorico* è sempre superiore all'effettivo.

Le differenze assolute tra valore effettivo e teorico sono :
inferiori ad 1 in 2 casi
» a 2 in 5 casi
» a 4 in 33 casi
» a 6 in 58 casi

La differenza assoluta massima è 13,02.

La media *delle differenze assolute tra valori effettivi e teorici è :*

Probabilità	Intensità	Rapporto
0,76	0,98	4,83

cordanze e 30 discordanze, mentre tra quest'ultime e l'intensità di transvariazione si hanno 33 concordanze e 45 discordanze.

Infine in 21 casi su 78, il segno è uguale (negativo) per tutte e tre le costanti (probabilità, intensità, rapporti di transvariazione).

Gli scarti sarebbero stati naturalmente tutti nulli se le distribuzioni delle seriazioni fossero state normali. Nel caso da noi considerato, le distribuzioni erano in effetti fra le più irregolari, ciò nonostante, almeno per quanto riguarda i valori ricavati dalla probabilità e dall'intensità di transvariazione, gli scarti si sono mentenuti entro limiti modesti. Questo risultato ci permette di concludere che le formule della transvariazione inversa, nel caso di seriazioni non correlate, sono applicabili con buona approssimazione anche a distribuzioni che si discostano di molto dall'ipotesi fondamentale della normalità.

Transvariazione inversa nel caso di dipendenza.

Nel caso di distribuzioni gaussiane correlate la probabilità di transvariazione (1) è:

$$P' = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 1 - 2\varphi(h)$$

dove $h = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2r\sigma_1\sigma_2}}$ con $M_1 - M_2$ la differenza tra le due medie; σ_1^2, σ_2^2 ed r sono rispettivamente le varianze e il coefficiente di correlazione, infine $\varphi(h)$ è l'integrale di Laplace i cui valori sono tabulati nei manuali di calcolo delle probabilità e che è legato all'altro integrale di Laplace $\Theta(x)$, definito dalla 1ª della (4), e i cui valori son anch'essi tabulati nei manuali di calcolo delle probabilità, dalla relazione $\varphi(h) = \Theta\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)$.

Ora, in analogia a quanto è stato fatto nel caso di indipendenza, uguagliamo a P' la probabilità di transvariazione P calcolata da noi nel discontinuo in caso di dipendenza:

$$1 - 2\varphi(h) = P \quad \text{da cui} \quad \varphi(h) = \frac{1-P}{2}.$$

---

(1) C. Gini e G. Sonnino: *Contributo alla transvariazione fra seriazioni correlate*. in « Atti della XI e XII riunione scientifica della S.I.S. 1951-52.

Detto h' il valore di h che nelle tavole di φ fa corrispondere $\frac{1-P}{2}$ a φ sarà

$$h' = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\, r\, \sigma_1\, \sigma_2}} \tag{1}$$

relazione che lega fra loro quattro grandezze statistiche fondamentali : la differenza $M_1 - M_2$, σ_1, σ_2 ed r e permette di risalire dalla probabilità di transvariazione ad esse. Conoscendo tre di esse si ricava la quarta.

Così per la differenza delle medie avremo :

$$d = M_1 - M_2 = h' \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\, r\, \sigma_1\, \sigma_2} \tag{α}$$

per le varianze basterà risolvere l'equazione di secondo grado in σ_1 oppure in σ_2 :

$$h'^2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\, r\, \sigma_1\, \sigma_2) - (M_1 - M_2)^2 = 0 \tag{β}$$

ed infine per ricavare r dalla probabilità di transvariazione basta calcolare l'espressione :

$$r = -\frac{(M_1 - M_2)^2 - h'^2\,(\sigma_1 + \sigma_2)^2}{2\, h'^2\, \sigma_1 \sigma_2} \tag{γ}$$

Per risalire dall'intensità di transvariazione alle varie costanti caratteristiche nel caso di dipendenza, basta tener presente che è (1)

$$I = e^{-\frac{1}{2}h^2} + h\sqrt{2\pi}\,\varphi\,(h) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,h$$

con $h = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - 2\, r\, \sigma_1 \sigma_2}}$ e che $\varphi\,(h)$ è il noto integrale di

(1) C. Gini e G. Sonnino. Opera citata.

TABELLA XI

Probabilità-Intensità

+ valore effettivo superiore al valore teorico. — valore effettivo inferiore al valore teorico.

	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistrati	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.	
12 Farmacisti	— * —												1/0
11 Commercianti	+ —	+ —											0/2
10 Imp. statali	+ —	+ —	— * —										1/2
9 Ufficiali	+ —	+ —	— * —	+ —									1/3
8 Prof. liceo	— +	— +	— * —	— * —	— +								2/3
7 Avvocati	— * —	— * —	— +	— +	— +	0 —							2/4
6 Capi az. agric.	— * —	— +	+ ** +	+ ** +	+ —	— +	— * —						4/3
5 Magistrati	+ ** +	— +	+ ** +	+ ** +	+ ** +	+ ** +	— * —	— * —					7/1
4 Capi az. ind.	— +	— +	+ ** +	+ —	+ ** +	— +	— * —	— * —	+ —				4/5
3 Ingegneri	— * —	— +	— +	+ ** +	+ ** +	— +	— * —	— +	+ ** +	— * —			6/4
2 Prof. d'Univ.	+ ** +	— +	+ ** +	+ ** +	+ ** +	— +	— +	— +	— * —	— * —	— +		6/5
1 Medici	— * +	— +	— +	+ ** +	+ ** +	— +	— +	— * —	— +	— * —	— * —	+ —	5/7
	6/6	1/10	7/3	6/3	5/3	1/6	4/2	3/2	2/2	3/0	1/1	0/1	

*Concordanza fra probabilità, intensità e rapporto. ** Concordanza fra probabilità e intensità, in discordanza col rapporto.

Laplace. Ora adoperando i valori tabulati di I a pag. 123 possiamo trovare il valore di h che corrisponde a un dato valore di I e con le stesse formule: (α) (β) e (γ) precedenti ricavare ognuna delle 4 costanti caratteristiche in funzione delle altre 3.

Detta P_d la probabilità di transvariazione (teorica nell'ipotesi gaussiana) nell'ipotesi di dipendenza e P_i la probabilità di transvariazione (teorica nell'ipotesi gaussiana) nel caso di indipendenza sarà:

$$\left.\begin{array}{l} P_i > P_d \text{ se } r > 0 \\ P_i = P_d \text{ se } r = 0 \\ P_i < P_d \text{ se } r < 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

infatti:

$$P_i - P_d = 2\left[\varphi\left(\frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,r\,\sigma_2\,\sigma_2}}\right) - \varphi\left(\frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)\right] =$$

$$= 2\,[\varphi\,(h_d) - \varphi\,(h_i)]\,,$$

ora siccome $h_d \gtreqless h_i$ a seconda che $r \gtreqless 0$ e lo stesso si verifica per l'integrale di Laplace, restano dimostrate le (1).

Abbiamo applicato una parte di queste formule agli stessi dati utilizzati nel caso precedente.

Abbiamo anzitutto calcolato le probabilità effettive di transvarazione delle seriazioni correlate. Le riportiamo nella tabella XII.

Da queste probabilità si ricavano, mediante le tavole dell'integrale di Laplace, i valori di h_{ij} (1) riportati nella tabella XIII.

Abbiamo quindi calcolato direttamente i coefficienti di correlazione, prendendo per σ comune la media aritmetica di tutti i σ. I valori approssimati così ottenuti sono riportati nella tabella XIV.

Disponiamo così di tutti gli elementi per calcolare i valori teorici delle differenze fra le medie aritmetiche dei gruppi transvarianti, prendendo sempre per σ comune la media aritmetica di tutti i σ.

---

(1) Poichè d'ora in avanti saranno considerate più di due distribuzioni indicheremo con D_1 e con D_2 la coppia generica di distribuzioni messe a confronto.

Probabilità effettive di transvariazione delle seriazioni correlate

Tabella XII

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	0,7120	Farmacisti										
11 Commercianti	0,8638	0,9876	Commerc.									
10 Imp. statali	0,8389	0,9412	0,9628	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,8545	0,9010	0,9504	0,8885	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,6066	0,6780	0,8111	0,6748	0,8359	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,4676	0,5914	0,7214	0,4767	0,6408	0,8607	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,4953	0,5635	0,5666	0,5635	0,6687	0,8330	0,9320	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,3839	0,4366	0,6377	0,3808	0,5263	0,6935	0,7275	0,9628	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,3498	0,4087	0,3870	0,3777	0,5387	0,5914	0,6997	0,5945	0,8389	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,1609	0,1888	8,3963	0,2600	0,4395	0,4087	0,4428	0,6224	0,6470	0,8080	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,2167	0,2508	0,4211	0,1981	0,3591	0,2787	0,4056	0,6501	0,6006	0,8854	1,1052	Professori d'Univ.
1 Medici	0,1269	0,1269	0,3189	0,1982	0,3221	0,3002	0,3436	0,5263	0,5759	0,6842	0,7770	0,9194
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

h_{ij} *ricavato dalla formula* $\varphi(h) = \frac{1 - P}{2}$ TABELLA XIII

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistrati	4 Capi az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	0,3792											
11 Commercianti	0,1715	0,0155										
10 Imp. statali	0,2033	0,0738	0,0470									
9 Ufficiali	0,1834	0,1244	0,0622	0,1402								
8 Prof. liceo	0,5149	0,4152	0,2391	0,4196	0,2071							
7 Avvocati	0,7264	0,5368	0,3566	0,7116	0,4766	0,1755						
6 Capi az. agric.	0,6819	0,5776	0,5731	0,5776	0,4279	0,2118	0,0853					
5 Magistrati	0,8708	0,7779	0,4709	0,8764	0,6337	0,3941	0,3484	0,0466				
4 Capi az. ind.	0,9350	0,8263	0,8651	0,8822	0,6148	0,5368	0,3857	0,5223	0,2033			
3 Ingegneri	1,4020	1,3136	0,8482	1,1264	0,7730	0,8263	0,7675	0,4925	0,7604	0,2430		
2 Prof. d'Univ.	1,2353	1,1484	0,8045	1,2870	0,9171	1,0832	0,8317	0,4536	0,5235	0,1441	—	
1 Medici	1,5264	1,5264	0,9967	1,2867	0,9902	1,0360	0,9471	0,6337	0,5594	0,4067	0,2832	0,1019
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

TABELLA XIV

r *calcolato con* σ *comune*

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	0,41027	Farmacisti										
11 Commercianti	— 0,02135	0,20636	Commerc.									
10 Imp. statali	0,16766	0,07948	— 0,03788	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,15120	0,26083	— 0,04052	0,30101	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,24722	0,33159	0,20544	0,14618	0,16375	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,11772	0,17868	0,07419	0,14967	0,30673	0,26939	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,12549	0,13213	0,28918	— 0,18933	0,01395	— 0,06008	— 0,6035	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,12426	0,23422	0,04968	0,23289	0,35331	0,43024	0,62544	0,09613	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,11859	0,10173	0,43821	— 0,17338	— 0,08195	0,16403	0,07071	0,57906	0,13520	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,14477	0,27666	0,15893	— 0,08077	0,02734	0,30312	0,26892	0,08842	0,34990	0,25909	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,20289	0,28336	0,24029	0,12385	0,25123	0,58154	0,51911	0,17598	0,62737	0,29149	0,50027	Professori d'Univ.
1 Medici	0,21506	0,22651	0,05100	— 0,02699	0,07431	0,35058	0,41982	0,13025	0,49467	0,22822	0,60052	0,58080
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

I risultati sono raccolti nella tabella XV. Nel caso della coppia Ingegneri-Professori di Università, abbiamo attribuito convenzionalmente il valore 0 alla grandezza h_{ij}, che in realtà è indeterminata, poichè la corrispondente probabilità di transvariazione è superiore a 1.

Il confronto tra i valori effettivi e i valori teorici della differenza tra le medie dei gruppi transvarianti dà i risultati raccolti nella Tabella XVI.

Risulta da questa tabella che:

a) i valori effettivi superano quelli teorici in 9 casi su 78 (11,54 %) e sono inferiori ad essi nei rimanenti 69 casi (88,46 %).

b) in 7 casi (8,97 %) la differenza fra i valori effettivi e i valori teorici rimane inferiore, in valore assoluto, all'unità, in 17 casi (21,80 %) è compresa fra 1 e 2, in 25 casi (32,05 %) è compresa fra 2 e 5, in 18 casi (23,08 %) fra 5 e 10 e in 11 casi (14,10 %), infine supera le 10 unità, con un valore massimo di 15,75. La media dei valori assoluti delle differenze è di 5,07. È da rivelare che le differenze più alte fra i valori effettivi e valori teorici si riscontrano in due gruppi: quello degli Impiegati statali e quello degli Ingegneri, esclusi i quali si avrebbero le seguenti percentuali:
0-1: 9,09 %; 1-2: 27,27 %: 2-5: 34,55 %: 5-10: 25,45 %; 10 e più: 3,64 %.

Nel complesso l'approssimazione è di gran lunga inferiore a quella riscontrata nel caso delle seriazioni indipendenti; risultato scontato in partenza, poichè per le seriazioni correlate le costanti di transvariazione vengono calcolate soltanto sulle osservazioni associate; di modo che il numero delle osservazioni su cui si fondano dette costanti è esattamente uguale alla radice quadrata del numero delle osservazioni su cui si fondano le costanti di transvariazione di gruppi ugualmente numerosi, considerati indipendenti. Inoltre, nel caso delle seriazioni correlate, le formule della transvariazione inversa si fondano non solo sull'ipotesi della normalità della distribuzione, ma anche sull'ipotesi di linearità della correlazione. Tale ipotesi, nel nostro caso, è evidentemente irreale.

Tenuto conto di queste circostanze, l'accordo può essere considerato abbastanza soddisfacente, tanto più che l'indice semplice

Differenze teoriche fra le medie

Tabella XV

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	11,31	Farmacisti										
11 Commercianti	6,67	0,54	Commerc.									
10 Imp. statali	7,20	2,75	1,86	Imp. stat.								
9 Ufficiali	6,56	4,15	2,46	4,55	Ufficiali							
8 Prof. liceo	17,35	13,18	8,28	15,06	7,35	Prof. liceo						
7 Avvocati	26,50	18,89	13,33	25,48	15,41	5,83	Avvocati					
6 Capi az. agric.	24,76	20,90	18,76	24,46	16,50	8,43	3,41	Capi az. agric.				
5 Magistrati	31,65	26,44	17,83	29,81	19,79	11,55	8,28	1,72	Magistrati			
4 Capi az. ind.	34,09	30,41	25,18	37,11	24,83	19,06	14,44	13,41	7,51	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	50,35	43,39	30,21	45,48	29,61	26,79	25,48	18,26	23,81	8,12	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	42,83	37,75	27,23	46,78	30,82	27,21	22,40	15,99	12,41	4,71	0,00	Professori d'Univ.
1 Medici	52,52	52,13	37,71	50,64	37,00	32,42	28,02	22,95	15,44	13,88	6,95	2,56
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Differenze tra i valori effettivi e i valori teorici di $M_i - M_j$ — TABELLA XVI

	13 Veterinari	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12 Farmacisti	—6,89	Farmacisti										
11 Commercianti	1,53	3,23	Commerc.									
10 Imp. statali	—1,67	—1,64	0,81	Imp. stat.								
9 Ufficiali	1,14	—0,88	—1,96	—2,38	Ufficiali							
8 Prof. liceo	—4,17	—4,42	—3,29	—7,41	—1,86	Prof. liceo						
7 Avvocati	—9,29	—6,10	—4,31	—13,80	—5,89	—1,80	Avvocati					
6 Capi az. agric.	—1,91	—2,48	—4,11	—7,14	—1,35	1,24	2,23	Capi az. agric.				
5 Magistrati	—8,13	—7,35	—2,51	—11,82	—3,97	—1,22	—1,98	—1,05	Magistrati			
4 Capi az. ind.	—3,36	—4,11	—2,65	—11,91	—1,80	—1,51	—0,92	—5,53	—0,30	Cap. az. ind.		
3 Ingegneri	—15,14	—12,60	—3,19	—15,79	—2,09	—4,76	—7,48	—5,90	—12,11	—3,63	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	—8,07	—7,42	—0,67	—17,55	—3,76	—5,63	—4,85	—4,08	—1,17	—0,68	0,46	Professori d'Univ.
1 Medici	—12,53	—16,57	—5,92	—16,18	—4,71	—5,62	—5,25	—5,81	1,03	—4,62	—2,18	2,67
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Cap. az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

di cograduazione tra i valori teorici e i valori effettivi delle differenze fra le medie risulta uguale a 0,875, cioè relativamente molto elevato.

Ci siamo serviti finora non dei valori esatti degli scarti quadratici medi ma di un valore approssimato (la media aritmetica dei σ), il cui uso comporta una notevole semplificazione dei calcoli, in quanto la formula : $d'_{ij} = h'_{ij}\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\, r_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j}$ si trasforma nell'altra molto più maneggevole : $d'_{ij} = h'_{ij}\,\sigma\sqrt{2}\,\sqrt{1 - r_{ij}}$.

Tale espediente appare, nel nostro caso, giustificato, essendo piccole le differenze tra i singoli σ e la loro media aritmetica. Infatti, il rapporto $\frac{\sigma^2}{\sigma_i\,\sigma_j}$ dove σ denota la media aritmetica dei σ; σ_i e σ_j i σ dei gruppi transvarianti, varia fra un minimo di 0,861 (coppia Ufficiali-Ingegneri) e un massimo di 1,239 (coppia Veterinari-farmacisti), cioè entro limiti piuttosto ristretti. Possiamo quindi supporre che l'impiego di questo valore approssimato non comporti inconvenienti seri. Per verificare, tuttavia, questa ipotesi, abbiamo voluto calcolare anche le differenze teoriche fra le medie, ottenute con l'impiego dei valori esatti dei singoli σ. A tale scopo abbiamo anzitutto determinato i valori effettivi dei coefficienti di correlazione, riportandoli nella tabella XVII.

Le differenze teoriche fra le medie, calcolate mediante gli scarti quadratici medi riportati nella tabella XVII, sono riportati nella tabella XVIII.

Il confronto fra i valori effettivi della differenza fra le medie ed i valori teorici così ottenuti, fornisce i risultati della Tabella XIX.

Risulta da questa tabella che :

a) i valori effettivi superano quelli teorici in 10 casi su 78 (12,82 %) e sono inferiori ad essi nei rimanenti 68 casi (87,18 %).

b) in 9 casi (11,54 %) la differenza fra i valori effettivi e i valori teorici rimane inferiore, in valore assoluto, all'unità, in 12 casi (15,38 %) è compresa tra 1 e 2, in 31 casi (39,74 %) è compresa fra 2 e 5, in 16 casi (20,51 %) fra 5 e 10 ; e in 12 casi (12,82 %) infine supera le 10 unità, con un valore massimo di 18,50. La edia dei valori assoluti delle differenze è di 4,87. Anche in questo caso le differenze più alte fra valori effettivi e valori teorici si riscontrano nei gruppi degli Impiegati statali e degli Ingegneri, esclusi i quali si avrebbero le seguenti percentuali :

Valori diretti di r

Tabella XVII

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	0,50843	Farmacisti										
11 Commercianti	—0,02331	0,22506	Commerc.									
10 Imp. statali	0,17741	0,08401	—0,03527	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,15594	0,26874	—0,03678	0,26480	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,27072	0,36274	0,19799	0,13654	0,14908	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,12718	0,19284	0,07054	0,13792	0,27551	0,25691	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,13015	0,13690	0,26395	—0,16749	0,01203	—0,05500	—0,05451	Capi az. agric.				
5 Magistrati	0,13903	0,26180	0,04892	0,22227	0,32866	0,42495	0,60945	0,08992	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,13773	0,11803	0,44789	—0,17175	—0,07913	0,16816	0,07152	0,56225	0,14162	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,14984	0,28581	0,14477	—0,07131	0,02353	0,27695	0,24240	0,07651	0,32665	0,25106	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,23528	0,32826	0,24523	0,12250	0,02421	0,59529	0,52425	0,17061	0,65618	0,31646	0,48403	Professori d'Univ.
1 Medici	0,25544	0,26877	0,05331	—0,02734	0,07338	0,36758	0,43427	0,12934	0,52995	0,25378	0,59512	0,64487
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

TABELLA XVIII

Differenze teoriche fra le medie

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistrati	4 Cap. az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	9,27											
11 Commercianti	6,47	0,51										
10 Imp. statali	7,01	2,69	1,92									
9 Ufficiali	6,51	4,89	2,58	4,98								
8 Prof. liceo	16,41	12,38	8,47	15,67	7,78							
7 Avvocati	25,49	18,13	13,69	26,73	16,64	6,02						
6 Capi az. agric.	24,47	20,66	20,00	25,77	17,79	8,79	3,58					
5 Magistrati	29,76	24,64	17,98	30,69	20,96	11,68	8,57	1,79				
4 Capi az. ind.	31,33	28,01	24,73	37,33	25,32	18,80	14,37	13,98	7,08			
3 Ingegneri	49,82	42,88	31,94	48,19	31,98	28,58	27,34	19,76	25,14	8,33		
2 Prof. d'Univ.	39,01	34,02	26,90	47,19	31,72	26,50	22,23	16,35	11,67	4,44	—	
1 Medici	46,96	46,56	36,90	50,47	37,45	31,33	27,29	23,16	14,57	12,94	7,11	2,24
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

Differenza tra i valori effettivi e i valori teorici di $M_i - M_j$ **TABELLA XIX**

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistrati	4 Capi az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	— 4,85											
11 Commercianti	1,73	3,26										
10 Imp. statali	— 1,48	— 1,58	0,75									
9 Ufficiali	1,19	— 1,62	— 2,08	— 2,81								
8 Prof. liceo	— 3,23	— 3,62	— 3,48	— 3,99	— 2,29							
7 Avvocati	— 8,28	— 5,34	— 4,67	— 15,05	— 7,12	— 1,99						
6 Capi az. agric.	— 1,62	— 2,24	— 5,35	— 8,45	— 2,64	0,88	2,06					
5 Magistrati	— 6,24	— 5,60	— 2,66	— 12,70	— 5,14	— 1,35	— 2,27	— 1,12				
4 Capi az. ind.	— 0,60	— 1,71	— 2,20	— 12,13	— 2,29	— 1,25	— 0,85	— 6,10	0,13			
3 Ingegneri	— 14,61	— 12,09	— 4,92	— 18,50	— 4,46	— 6,55	— 9,34	— 7,40	— 13,74	— 3,84		
2 Prof. d'Univ.	— 4,35	— 3,69	— 0,34	— 17,96	— 4,66	— 4,92	— 4,68	— 4,44	— 0,43	— 0,41	0,46	
1 Medici	— 6,97	— 11,00	— 5,11	— 16,01	— 5,16	— 4,53	— 4,52	— 6,02	1,90	— 3,68	— 2,34	2,99
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

0-1 : 12,73 % ; 1-2/18,18 % ; 2-5 : 45,45 % ; 5-10 : 21,82 % ; 10 e più : 1,82 %.

L'indice semplice di cograduazione fra i valori teorici e i valori effettivi risulta uguale a 0,865.

Il confronto di questi risultati con quelli ottenuti precedentemente, dimostra che l'impiego dei valori esatti degli scarti quadratici medi non ha nel complesso apportato alcun sostanziale miglioramento, anche se le approssimazioni più soddisfacenti sono migliori di quelle che si sono avute col σ comune.

Tale conclusione, che corrisponde pienamente alle nostre previsioni, è confermata dal fatto che solo in 38 casi su 78 (48,72 %) l'approssimazione è migliore che con l'impiego di σ comune, mentre è peggiore in 39 casi (50 %).

Come abbiamo osservato sopra, la formula di cui ci siamo serviti presuppone una correlazione perfettamente lineare.

Si pone pertanto la questione se, e fino a che punto sia utile fare entrare nei calcoli il coefficiente di correlazione, quando la correlazione non è lineare.

Per rispondere a tale quesito, abbiamo calcolato i valori delle differenze fra le medie ponendo r eguale a 0 e impiegando i valori effettivi dei σ. Gli scarti tra i valori effettivi e i valori teorici così ottenuti sono riportati nella tabella XX.

Risulta quindi :

a) in 9 casi su 78 (11,54 %) il valore effettivo supera il valore teorico, in 69 casi (88,46 %) il valore teorico supera il valore effettivo.

b) il valore assoluto dello scarto è inferiore all'unità in tre casi (3,85 %), è compreso fra 1 e 2 in 9 casi (11,54 %), fra 2 e 5 in 18 casi (23,08 %), fra 5 e 10 in 27 casi (34,61 %) e supera 10 in 21 casi (26,92 %), il valore massimo dello scarto è di 21,13, la media aritmetica dei valori assoluti è pari a 7,58.

c) in 10 casi (12,82 %) l'approssimazione è migliore di quella ottenuta precedentemente con l'impiego dei valori effettivi di r, in 67 casi (85,90 %) è peggiore, in 1 caso (1,28 %) i valori coincidono, essendosi posto $h = 0$.

d) l'indice semplice di cograduazione fra valori effettivi e valori teorici è pari a 0,836.

Differenze tra valori effettivi e valori teorici di $M_i - M_t$ — Tabella XX

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	— 8,81	Farmacisti										
11 Commercianti	1,80	3,19	Commerc.									
10 Imp. statali	— 2,19	— 169	0,78	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,63	1,53	— 2,04	— 3,64	Ufficiali							
8 Prof. liceo	— 6,00	— 6,72	— 4,47	— 9,22	— 2,95	Prof. liceo						
7 Avvocati	— 10,06	— 7,37	— 5,18	— 17,11	— 10,02	— 2,95	Avvocati					
6 Capi az. agric.	— 3,36	— 3,79	— 8,66	— 6,53	— 2,75	1,11	2,15	Capi az. agric.				
5 Magistrati	— 8,54	— 9,56	— 3,11	— 16,88	— 9,74	— 5,07	— 7,41	— 1,20	Magistrati			
4 Capi az. ind.	— 3,00	— 3,52	— 10,73	— 9,30	— 1,35	— 3,06	— 1,39	— 13,17	5,34	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	— 18,75	— 19,78	— 5,74	— 16,87	— 4,84	— 11,57	— 13,41	— 8,20	— 18,91	— 5,13	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	— 9,84	— 11,15	— 4,39	— 21,13	— 9,34	— 20,03	— 14,63	— 6,04	— 8,71	— 1,34	— 0,46	Professori d'Univ.
1 Medici	— 14,43	— 18,88	— 6,14	— 15,35	— 6,60	— 12,56	— 13,47	— 7,67	— 3,54	— 5,72	— 6,33	— 1,47
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Da tutto ciò si deduce che l'impiego dei valori effettivi di r apporta un sostanziale miglioramento nell'approssimazione dei valori teorici ai valori effettivi anche quando la correlazione non è lineare.

D'altra parte, tuttavia, anche l'approssimazione che si è ottenuta ponendo $r = 0$ non appare tanto lata (sopratutto tenendo conto del valore elevato dell'indice di cograduazione) da non autorizzare l'impiego di questo procedimento nel caso che si ignori il valore del coefficiente di correlazione.

Sempre partendo dalle probabilità di transvariazione delle seriazioni correlate abbiamo poi calcolato i valori teorici dei coefficienti di correlazione. I risultati di questi calcoli, in cui abbiamo preso per σ comune la media aritmetica dei σ, sono raccolti nella Tabella XXI.

Si osserverà che in tre casi i valori teorici di r risultano inferiori a -1 e che nella coppia « Commercianti-Farmacisti » si perviene addirittura ad un valore inferiore a -38. È facile rendersi conto che questo valore teorico sarà inferiore a -1, ogni qualvolta h'_{ij} risulterà minore di $\frac{d}{2\sigma}$, ossia ogni qualvolta la probabilità effettiva di transvariazione sarà maggiore di $1 - 2\varphi\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.

Il confronto fra i valori effettivi e i valori teorici del coefficiente di correlazione dà i risultati riportati nella Tabella XXII.

I segni di queste differenze coincidono con quelli delle differenze fra i valori effettivi e i valori teorici delle differenze fra le medie dei gruppi transvarianti (tab. XVI), calcolati col σ comune.

Tale concordanza, che si determinerebbe necessariamente qualora avessimo impiegato per il calcolo delle differenze fra le medie i valori esatti dei coefficienti di correlazione (tab. XVII), anzichè quelli approssimati, calcolati con l'impiego del σ comune (tab. XIV) oppure se avessimo confrontato i valori teorici a quelli approssimati e che del pari si deve verificare quando nel calcolo di entrambi i valori teorici si impiegano i valori esatti dei σ, è dovuta in questo caso all'esiguità delle oscillazioni dei σ intorno alla loro media che ha impedito che si realizzasse mai la

Valori teorici di r

Tabella XXI

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistrati	4 Capi az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	0,90991											
11 Commercianti	—0,51586	−38,26706										
10 Imp. statali	0,50940	0,84999	—1,13985									
9 Ufficiali	—0,16878	0,54185	0,95716	0,84115								
8 Prof. liceo	0,56556	0,70485	0,71120	0,77960	0,53404							
7 Avvocati	0,62781	0,62358	0,57577	0,82136	0,73544	0,65036						
6 Capi az. agric.	0,25546	0,32566	0,56672	0,40379	0,16881	—0,39529	—1,89883					
5 Magistrati	0,51628	0,60068	0,29819	0,72061	0,58676	0,54444	0,78319	0,86296				
4 Capi az. ind.	0,28376	0,32827	0,55028	0,45897	0,06958	0,29126	0,18527	0,85469	0,16603			
3 Ingegneri	0,58179	0,63571	0,32713	0,53933	0,15958	0,52869	0,63529	0,58238	0,84302	0,77362		
2 Prof. d'Univ.	0,47499	0,53750	0,27729	0,65798	0,42273	0,73683	0,70476	0,54288	0,69433	0,48140	—	
1 Medici	0,54488	0,64013	0,32546	0,52441	0,29491	0,55628	0,61674	0,51492	0,42522	0,65626	0,81189	—074661
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

TABELLA XXII

Differenze fra valori effettivi e valori teorici di r

	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	Veterinari											
12 Farmacisti	— 0,40148	Farmacisti										
11 Commercianti	0,49255	38,49212	Commerc.									
10 Imp. statali	— 0,33199	— 0,76598	1,10458	Imp. stat.								
9 Ufficiali	0,32472	— 0,27311	— 0,99394	— 0,57635	Ufficiali							
8 Prof. liceo	— 0,29484	— 0,34211	— 0,51321	— 0,64306	— 0,38496	Prof. liceo						
7 Avvocati	— 0,50063	— 0,43074	— 0,50523	— 0,68344	— 0,45993	— 0,39345	Avvocati					
6 Capi az. agric.	— 0,12531	— 0,18876	— 0,30277	— 0,57128	— 0,15671	0,34029	1,84432	Capi az. agric.				
5 Magistrati	— 0,37725	— 0,33888	— 0,24927	— 0,49834	— 0,25810	— 0,11949	— 0,17374	— 0,77304	Magistrati			
4 Capi az. ind.	— 0,14603	— 0,21024	— 0,10239	— 0,63072	— 0,14871	— 0,12310	— 0,11375	— 0,29244	— 0,02441	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	— 0,43195	— 0,34990	— 0,18236	— 0,61064	— 0,13605	— 0,25174	— 0,39289	— 0,50587	— 0,51637	— 0,52256	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	— 0,23971	— 0,20924	— 0,03206	— 0,53548	— 0,18052	— 0,14154	— 0,18051	— 0,37227	— 0,03815	— 0,16494	—	Professori d'Univ.
1 Medici	— 0,28944	— 0,37136	— 0,27215	— 0,55175	— 0,22153	— 0,19870	— 0,18247	— 0,38558	0,10473	—0,40248	— 0,22677	1,39148
	Veterinari	Farmacisti	Commerc.	Imp. stat.	Ufficiali	Prof. liceo	Avvocati	Capi az. agric.	Magistr.	Capi az. ind.	Ingegneri	Professori d'Univ.
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

duplice disuguaglianza $\frac{2h^2\sigma^2 - d^2}{2h^2\sigma_i\sigma_j} \gtrless r_{ij} \gtrless \frac{2h^2\sigma^2 - d^2}{2h^2\sigma^2}$, la quale avrebbe avuto per risultato una discordanza di segno.

Per facilitare il confronto fra l'approssimazione dei valori teorici delle differenze fra le medie e l'approssimazione dei valori teorici dei coefficienti di correlazione abbiamo raggruppato le cifre dell'ultima tabella in cinque classi, i cui limiti ragguagliati alla media aritmetica dei valori effettivi dei coefficienti di correlazione (0,215) corrispondono ai limiti della classificazione usata per le differenze fra le medie, ragguagliati alla media aritmetica dei valori effettivi di queste differenze (15,90). Queste classi sono le seguenti : 0-0,014 ; 0,014-0,027 ; 0,027-0,068 0,068-0,135 ; 0,135 e più.

Ne risulta il seguente quadro :

0 – 0,014	0 casi	
0,014 – 0,27	1 caso	su 77 (pari all'1,30%)
0,027 – 0,068	2 casi	(2,60%)
0,068 – 0,135	6 casi	(7,79%)
0,135 e più	68 casi	(88,31%)

Media dei valori assoluti delle differenze : 0,878.

Il confronto con i risultati ottenuti per la differenza tra le medie, dimostra immediatamente che per i coefficienti di correlazione l'accordo fra valori effettivi e valori teorici è assai meno soddisfacente. Ciò viene, del resto, anche confermato dal fatto che per questi ultimi l'indice semplice di cograduazione fra i valori effettivi e valori teorici è pari a 0,392 cioè di gran lunga inferiore a quello delle differenze fra le medie.

Anche per il coefficiente di correlazione, analogamente a quanto è stato fatto per le differenze fra le medie, abbiamo voluto determinare i valori teorici servendosi dei valori esatti dei σ.

I valori così ottenuti sono riportati nella tabella XXIII.

Anche questa volta in due casi i valori tèorici di r risultano inferiori a -1. Con l'impiego dei valori esatti dei σ questo valore teorico sarà inferiore a -1 ogni qualvolta h risulterà minore di $\frac{d}{\sigma_1 + \sigma_2}$ ossia ogni qualvolta la probabilità effettiva di transvaria-

TABELLA XXIII

Valori teorici di r.

	13 Veterinari	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12 Farmacisti	0,88836	Farmacisti										
11 Commercianti	—0,64667	—41,79166	Commerc.									
10 Imp. statali	0,49358	0,85384	—0,99140	Imp. stat.								
9 Ufficiali	—0,18819	0,54475	0,96149	0,86055	Ufficiali							
8 Prof. liceo	0,53202	0,68478	0,72172	0,79472	0,57757	Prof. liceo						
7 Avvocati	0,62355	0,60318	0,59671	0,83561	0,76347	0,66656	Avvocati					
6 Capi az. agric.	0,24390	0,31722	0,60583	0,47278	0,28329	0,27590	—1,61765	Capi az. agr.				
5 Magistrati	0,46409	0,55887	0,30923	0,73491	0,61869	0,55030	0,78932	0,87477	Magistrati			
4 Capi az. ind.	0,17035	0,22277	0,54225	0,46838	0,10868	0,27513	0,17854	0,86531	0,12702	Capi az. ind.		
3 Ingegneri	0,65235	0,63958	0,38851	0,59356	0,27682	0,57097	0,67218	0,63862	0,85649	0,78731	Ingegneri	
2 Prof. d'Univ.	0,39346	0,46642	0,26427	0,66590	0,45033	0,73225	0,70434	0,56305	0,68093	0,43679	—	Professori d'Univ.
1 Medici	0,46037	0,57389	0,29845	0,52486	0,32184	0,53807	0,60805	0,52752	0,38600	0,61800	0,82305	—0,93894
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

zione è maggiore di $1 - 2\,\varphi\left(\frac{d}{\sigma_i + \sigma_j}\right)$. Si trova, parallelamente, che il valore teorico di r sarà maggiore dell'unità quando la probabilità effettiva di transvarazione è minore di $1 - 2\,\varphi\left(\frac{d}{\sigma_i + \sigma_j}\right)$ il che, nel caso da noi esaminato, non si verifica mai. Prendendo il σ comune, r evidentemente non può mai superare l'unità.

Il confronto fra i valori effettivi e i valori teorici del coefficiente di correlazione dà i risultati riportati nella Tabella XXIV.

Risulta da questa tabella che :

a) i segni di queste differenze coincidono con quelli delle differenze fra i valori effettivi e i valori teorici delle differenze fra le medie dei gruppi transvarianti, calcolati con l'impiegi dei valori esatti dei σ (tab. XIX). Come già osservato sopra, tale concordanza non è casuale, ma necessaria.

b) I valori assoluti degli scarti sono così distribuiti :

0 – 0,014	0 caso	
0,014 – 0,027	3 casi	su 77 (pari al 3,90%)
0,027 – 0,068	1 caso	(1,30%)
0,068 – 0,135	9 casi	(11,69%)
0,135 e più	64 casi	(83,11%)

c) La media dei valori assoluti delle differenze è di 0,921.

Il confronto tra questi risultati e quelli ottenuti precedentemente (tab. XXII) con l'impiego del σ comune, dimostra che anche in questo caso l'impiego dei valori esatti dei σ non apporta alcun sostanziale miglioramento.

Ciò viene confermato dal fatto che l'indice semplice di cograduazione tra valori teorici e valori effettivi si riduce a 0,316 ; mentre dal confronto più particolareggiato delle tabelle risulta che solo in 33 casi su 77 (42,86 %) si raggiunge un'approssimazione migliore ; nei restanti 44 casi (57,14 %), invece, l'approssimazione è migliore con l'impiego del σ comune.

Differenze fra valori effettivi e valori teorici di r.

TABELLA XXIV

	13 Veterinari	12 Farmacisti	11 Commerc.	10 Imp. stat.	9 Ufficiali	8 Prof. liceo	7 Avvocati	6 Capi az. agric.	5 Magistr.	4 Capi az. ind.	3 Ingegneri	2 Professori d'Univ.
12 Farmacisti	— 0,37993											
11 Commercianti	0,62336	42,01672										
10 Imp. statali	— 0,31617	— 0,76983	0,95613									
9 Ufficiali	0,34413	— 0,27601	— 0,99827	— 0,59575								
8 Prof. liceo	— 0,26130	— 0,32204	— 0,52373	— 0,65818	— 0,42849							
7 Avvocati	— 0,49637	— 0,41034	— 0,52617	— 0,69769	— 0,48796	— 0,40965						
6 Capi az. agric.	— 0,11375	— 0,18032	— 0,34188	— 0,64027	— 0,27126	0,22090	1,56314					
5 Magistrati	— 0,32506	— 0,29707	— 0,26031	— 0,51264	— 0,29003	— 0,12535	— 0,17987	— 0,78485				
4 Capi az. ind.	— 0,03262	— 0,10474	— 0,09436	— 0,64013	— 0,18781	— 0,10697	— 0,10702	— 0,30306	0,01460			
3 Ingegneri	— 0,50251	— 0,35277	— 0,24374	— 0,66487	— 0,25329	— 0,09402	— 0,42978	— 0,56211	— 0,52984	— 0,53625		
2 Prof. d'Univ.	— 0,15818	— 0,13816	— 0,01904	— 0,54340	— 0,20812	— 0,13696	— 0,18009	— 0,39244	— 0,02475	— 0,12033	—	
1 Medici	— 0,20493	— 0,30512	— 0,24514	— 0,55190	— 0,24846	— 0,17049	— 0,17308	— 0,39818	0,13395	— 0,36422	— 0,22793	1,58381
	Veterinari 13	Farmacisti 12	Commerc. 11	Imp. stat. 10	Ufficiali 9	Prof. liceo 8	Avvocati 7	Capi az. agric. 6	Magistr. 5	Capi az. ind. 4	Ingegneri 3	Professori d'Univ. 2

SOMMARIO

Come è noto, date due distribuzioni di frequenza relative alle variabili X ed Y, si dice che fra le due distribuzioni vi è transvariazione se vi sono alcune differenze $X—Y$ di segno contrario alla differenza M_X — M_Y fra le medie delle rispettive distribuzioni. L'ammontare di queste differenze come anche il loro numero, oppure l'area comune alle due distribuzioni danno luogo rispettivamente all'intensità, alla probabilità ed all'area di transvariazione. Inoltre è noto che facendo l'ipotesi che X ed Y siano ambedue distribuite normalmente, correlate o meno, queste costanti di transvariazione sono facilmente determinabili mediante l'integrale di Laplace in funzione delle medie, delle varianze e del coeff. di correlazione del Bravais.

Di solito la determinazione delle costanti di transvariazione rappresenta il punto di arrivo rispetto alle costanti delle due distribuzioni (media, varianza, indice del Bravais), che ne rappresentano così gli antecedenti usuali; invece in questo lavoro si risolve e si applica il problema inverso, cioè, data una certa costante di transvariazione ed alcune costanti delle due distribuzioni, si determinano le rimanenti costanti di queste; per esempio, data la probabilità di transvariazione, le varianze delle distribuzioni e l'indice di correlazione del Bravais, si deduce la differenza tra le medie.

I metodi di inversione suddetti vengono applicati ad un complesso di dati, frutto di un'inchiesta effettuata a mezzo di schede qualche anno addietro fra alcune centinaia di studenti della facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali della Università di Roma. Tale inchiesta mirava a conoscere la valutazione espressa in punti centesimali che lo studente faceva di 13 professioni indicate nella scheda: Avvocati, Ingegneri, Medici, Professori di Università, Ufficiali, Magistrati, Impiegati statali gruppo A, Farmacisti, Veterinari, Commercianti, Professori di Liceo, Capi d'Azienda Agricole, Capi di Aziende Industriali. Le schede furono 330.

Alle 13 distribuzioni di frequenza relative ai voti delle 13 professioni accoppiate nelle $\binom{13}{2}$ maniere possibili sono state applicate le varie formule di inversione della transvariazione, postulando prima la indipendenza e poi tenendo conto della dipendenza fra le varie distribuzioni. Mediante il confronto tra le costanti di transvariazione effettive calcolate direttamente nel discontinuo e le costanti corrispondenti ricavate indirettamente dalle costanti delle distribuzioni assimilando le varie distribuzioni alla distr. normale, si sono trovati in genere accordi soddisfacenti, che autorizzano ad attribuire un valore probatorio notevole ai risultati registrati, considerando le condizioni sfavorevoli in cui sono stati ottenuti; cioè considerando come in effetti l'ipotesi della normalità sia irreale data la forma delle 13 distribuzioni risultate dall'inchiesta.

Riassumiamo brevemente i risultati più salienti della ricerca. Postulata dapprima l'indipendenza tra le varie distribuzioni di frequenza delle votazioni, cioè che sia nullo il coefficiente di correlazione del Bravais in seno ad ognuna delle $\binom{13}{2} = 78$ coppie di professioni si ha che le varie costanti delle distribuzioni calcolate indirettamente partendo dalle costanti di transvariazione, presentano in genere un'aderenza molto soddisfacente ai corrispondenti valori delle stesse costanti calcolati direttamente e la rispondenza fra valori diretti ed indiretti della stessa costante diviene tanto meno soddisfacente quanto più asimmetriche sono le distribuzioni considerate nelle varie coppie.

Di più, ad esempio, per le differenze tra le medie e le differenze tra le mediane si nota che la rispondenza tra valori calcolati direttamente ed indirettamente è peggiore qualora anzichè della media aritmetica delle varie distribuzioni si considerino le mediane. Infatti, siccome medie e mediane coincidono nelle distribuzioni normali, si può ritenere che la cosidetta « resistenza » alle anomalie della ipotesi della legge normale, è più forte per la emdia che per la mediana.

Concludendo, nella parte svolta nell'ipotesi di indipendenza si nota che per la differenza tra la medie (che è il parametro più interessante rispetto alle costanti transvariazione) nelle varie coppie di distribuzioni si ha che il valore teorico supera l'effettivo nel 61,5 % dei casi se partiamo dalla probabilità di transvariazione,

nel 42,3 % dei casi se partiamo dalla intensità di transvariazione e nel 100 % dei casi se partiamo dal rapporto di transvariazione.

La media delle differenze assolute fra i valori effettivi e teorici è stata rispettivamente secondo i tre procedimenti indicati di 0,76 ; 0,98 ; 4,83.

Postulando invece l'esistenza di un certo grado di dipendenza tra le varie distribuzioni e assimilando la distribuzione di frequenza di ogni coppia di variabili alla distribuzione normale doppia implicante il coefficiente r del Bravais e ripetendo le determinazioni indirette delle varie costanti compreso r si nota in generale una rispondenza, tra valori così ottenuti indirettamente e valori effettivi, meno soddisfacente di quella ottenuta nel caso indipendenza e ciò evidentemente è dovuto per buona parte al fatto che le costanti di transvariazione per le variabili correlate vengono calcolate solo sulle osservazioni associate e quindi il numero delle osservazioni su cui si basano le costanti di transvariazione è uguale alla radice quadrata del corrispondente numero nel caso di indipendenza ; di più, oltre alla ipotesi della normalità in questo caso viene assunta l'ipotesi della linearità della correlazione.

Anche nel caso di dipendenza sono state classificate le differenze tra valori teorici ed effettivi relative alla differenza fra medie e all'indice del Bravais, più precisamente nella differenza tra medie i valori effettivi superano quelli teorici nell'11,5 % dei casi partendo dalla probabilità di transvariazione ; la media dei valori assunti dalle differenze tra valori teorici ed effettivi in valore assoluto è qui di 5.07 ; il calcolo delle differenze teoriche tra medie è stato fatto adoperando una scarto quadrativo medio comune e poi il calcolo si è ripetuto facendo l'indice del Bravais uguale a zero e con gli scarti quadratici medi effettivi ottenendo dei risultati relativamente peggiori.

Questo dimostra, in sostanza che, anche nella supposizione della non linearità della correlazione, risulta indicato fare entrare lo stesso nei calcoli l'indice del Bravais, d'altra parte data l'approssimazione non molto lata dei valori teorici a quelli effettivi ottenuta supponendo $r = o$ è consigliabile pure ritenere nullo r nel caso che si ignori il suo valore. Nelle differenze tra valori teorici e valori effettivi dell'indice del Bravais si nota che coincidono i segni di queste con i segni dei corrispondenti scarti fra

le differenze tra medie e tale coincidenza si dimostra che è necessaria ; inoltre per i coefficienti di correlazione le rispondenze tra valori teorici ed effettivi sono molto più grossolane che per le differenze tra medie.

A dare una misura di queste rispondenze tra valori teorici ed effettivi cioè tra valori calcolati indirettamente e direttamente, sia nell'ipotesi di dipendenza che indipendenza, vengono determinati gli indici di cograduazione tra le due serie di valori per ogni costante.

CARLO BENEDETTI

Il coefficiente di correlazione del *Bravais* come funzione non moltiplicativa [1]

Come è noto il coefficiente di correlazione del Bravais r_{XY} fra due variabili statistiche X ed Y ci fornisce una misura dell'aderenza del legame effettivo tra X e Y ad una relazione lineare tra esse.

Così se $1 > r_{XY} > 0$ si può dire che il legame tra X ed Y propende per una concordanza lineare $Y = aX + b$ con $a > 0$; mentre se $-1 < r_{XY} < 0$ si propende per una discordanza di tipo lineare $Y = aX + b$ con $a < 0$.

Ora, dato che r_{XY} coglie solo particolari aspetti del presunto vero legame fra X ed Y, nel caso di una terza variabile Z, viene spontaneo il domandarsi se la correlazione positiva tra X ed Y e tra Y e Z implica necessariamente la correlazione positiva tra X e Z o meno; ossia se la propensione alla concordanza lineare tra X ed Y e tra Y e Z implica necessariamente una propensione alla concordanza lineare tra X e Z o meno.

A prima vista potrebbe sembrare giusto il sillogismo: se A propende a concordare con B e B propende a concordare con C, A propende a concordare con C.

A questo proposito però si avverte subito che quando Y è confrontata con X, ponendo per ipotesi $r_{XY} > 0$ ma diverso da 1, vi è un impedimento alla concordanza lineare perfetta che fornisce $r_{XY} = 1$ ed è naturale pensare che ciò sia dovuto a delle caratteristiche differenziali fra Y ed X caratteristiche che, invece, potrebbero essere identiche nel confronto tra Y e Z (posto

(1) Questo lavoro è stato oggetto di una comunicazione al Seminario di Statistica della Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali della Università di Roma, il 18 Maggio 1957.

anche qui $0 < r_{YZ} < 1$) dove peraltro vi potrebbero essere differenze tra quelle caratteristiche che, invece, erano identiche nel confronto tra Y e X; così nel confronto tra X e Z si accumulerebbero queste caratteristiche differenziali in quanto X e Z tendono alla concordanza positiva con Y solo per due vie diverse.

In altre parole se Y concorda (linearmente s'intende) con X per certe caratteristiche e concorda con Z per certe altre ne segue che X e Z saranno in discordanza per tutte queste caratteristiche, cioè per quelle concordi tra X e Y, ma non con Z e per quelle concordi tra Y e Z, ma non con X.

Nella proposizione che ora dimostreremo risulterà che, nel caso di tre variabili statistiche X, Y, Z è possibile il caso di:

$$r_{XY} > 0 ; \qquad r_{YZ} > 0 ; \qquad r_{XZ} < 0$$

Queste disuguaglianze potrebbero sonare come una contraddizione se affidassimo ad r un compito più vasto di quello, in verità, piuttosto limitato, che gli compete.

Nelle applicazioni pratiche è bene tener presente la possibilità messa in luce dalle disuguaglianze di cui sopra.

Teorema — *Date tre successioni di reali* (X_i), (Y_i), (Z_i), $(i = 1, 2, \dots n)$ *le condizioni*:

$$r_{XZ} \neq r_{XY}\, r_{YZ} ; \qquad r_{YZ} > 0$$

sono sufficienti per l'esistenza di una successione (X'_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ *combinazione lineare di* (X_i) *ed* (Y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ *per cui si abbia*:

$$r_{X'Y} > 0 ; \qquad r_{YZ} > 0 ; \qquad r_{X'Z} < 0$$

oppure:

$$r_{X'Z} > 0 ; \qquad r_{ZY} > 0 ; \qquad r_{X'Y} < 0$$

Dimostrazione.

1° *caso*: La disuguaglianza:

$$r_{XZ} > r_{XY}\, r_{YZ}$$

può scriversi anche così, posto $x = X - \frac{\Sigma X}{n}$, $y = Y - \frac{\Sigma Y}{n}$, $z = Z - \frac{\Sigma Z}{n}$:

$$\frac{\Sigma x z}{\Sigma y z} > \frac{\Sigma x y}{\Sigma y^2}$$

il che significa che possiamo prendere un reale K tale che:

$$\frac{\Sigma x z}{\Sigma y z} > K > \frac{\Sigma x y}{\Sigma y^2}$$

e cioè:

$$\Sigma x z - K \Sigma y z > 0 ; \qquad \Sigma x y - K \Sigma y^2 < 0$$

$$\Sigma x z - K \Sigma y z = \Sigma z (x - K y) = \Sigma x' z > 0$$

$$\Sigma x y - K \Sigma y^2 = \Sigma y (x - K y) = \Sigma x' y < 0$$

con:

$$x' = x_i - K y_i \ (i = 1, 2, \dots n) ; \ \Sigma x_i' = \Sigma x_i - K \Sigma y_i = 0 ; \ \Sigma x_i'^2 > 0 .$$

Ora da:

$$x_i = X_i - \frac{\Sigma X_i}{n} ; \qquad y_i = Y_i - \frac{\Sigma Y_i}{n}$$

abbiamo:

$$x_i' = X_i' - \frac{\Sigma X_i'}{n}$$

dove:

$$X_i' = X_i - K Y_i .$$

Inoltre $\Sigma x'z$ e $\Sigma x'y$ non sono che i numeratori di $r_{X'Z}$ e $r_{X'Y}$ da cui differiscono come è noto, solo per fattori positivi; quindi, avendo trovato degli x_i' tali che:

$$\Sigma x' z > 0 \quad ; \quad \Sigma z y > 0 \quad ; \quad \Sigma x' y < 0$$

abbiamo anche:

$$r_{X'Z} > 0 \quad ; \quad r_{ZY} > 0 \quad ; \quad r_{X'Y} < 0$$

2° *caso* : $r_{XZ} < r_{XY}\, r_{YZ}$. In perfetta analogia con il 1° caso si ottengono le disuguaglianze :

$$r_{X'Y} > 0 \quad ; \quad r_{YZ} > 0 \quad ; \quad r_{X'Z} < 0 .$$

c. d. d.

* * *

La condizione sufficiente basilare :

$$r_{XZ} \neq r_{XY}\, r_{YZ}$$

si verifica in generale poichè r non è, salvo casi particolari, moltiplicativo (o circolare) in quanto è facile vedere che, in generale, è :

$$\Sigma\, x\, z \neq \frac{\Sigma\, x\, y\, \Sigma\, y\, z}{n\, \sigma_y^2}$$

infatti vediamo che il secondo membro dipende, in generale, da y mentre il primo è indipendente da esso. Invero, ad es., i coefficienti di correlazione parziale si basano proprio sulla condizione $r_{XZ} \neq r_{XY}\, r_{YZ}$; infatti il coefficiente parziale di correlazione tra X e Z eliminata l'influenza di Y è :

$$(r_{XZ} - r_{XY}\, r_{YZ}) / \sqrt{1 - r_{XY}^2} \cdot \sqrt{1 - r_{YZ}^2} .$$

e sarebbe sempre nullo se r fosse moltiplicativo.

Dalla disuguaglianza di Yule :

$$r_{XY}^2 + r_{YZ}^2 + r_{XZ}^2 - 2\, r_{XY}\, r_{YZ}\, r_{XZ} \leq 1$$

si ricava inoltre che la terna di coefficienti $r_{X'Y}$, r_{YZ}, $r_{X'Z}$ soddisfacienti alle disuguaglianze di cui al teorema dimostrato devono soddisfare alla seguente limitazione :

$$r_{X'Y}^2 + r_{YZ}^2 + r_{X'Z}^2 < 1$$

limitazione che serve a circoscrivere in qualche modo il dominio delle suddette terne di disuguaglianze.

In una indagine effettuata da Ogburn ([2]) negli Stati Uniti nel 1935 sulla situazione della criminalità in varie città furono considerate, tra l'altro, quattro variabili :

X_1 = tasso di criminalità (numero di reati per 1000 abitanti)

X_2 = percentuale di abitanti maschi

X_3 = percentuale di abitanti maschi nati all'estero

X_4 = numero di ragazzi sotto i 5 anni di età per 1000 donne sposate ed in età tra i 15 e i 44 anni,

ottenendo terne di disuguaglianze dello stesso tipo di quelle da noi considerate :

$$r_{X_1X_2} = 0{,}44 \quad ; \quad r_{X_2X_3} = 0{,}25 \quad ; \quad r_{X_1X_3} = -0{,}34$$

$$r_{X_2X_3} = 0{,}25 \quad ; \quad r_{X_3X_4} = 0{,}44 \quad ; \quad r_{Y_2X_4} = -0{,}19$$

Altre disuguaglianze dello stesso tipo si trovano in un lavoro di C. Gini, C. Viterbo, C. Benedetti, A. Herzel ([3]). In questo lavoro sono esposti, tra l'altro, i risultati di una inchiesta fatta tra gli studenti della Facoltà di Scienze Statistiche Demografiche e Attuariali dell'Università di Roma per conoscere la valutazione, espressa in punti da 1 a 100, da parte degli studenti, delle seguenti 13 professioni : Avvocati, Ingegneri, Medici, Professori di Università, Ufficiali, Magistrati, Impiegati Statali gruppo A, Farmacisti, Veterinari, Commercianti, Professori di Liceo, Capi di Aziende Agricole, Capi di Aziende Industriali. In questo lavoro sono stati calcolati, tra l'altro, i coefficienti di correlazione tra le $\binom{13}{2}$ coppie di distribuzioni di frequenza dei voti

---

([2]) W. F. Ogburn (*1935*) — *Factors in the variation of crime among cities*, « Journal of the American Statistical Association » *30,12* ed anche M. G. Kendall. — *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. I, pagg. *375-76*, London, Griffin, *1952*.

([3]) C. Gini, C. Viterbo, C. Benedetti, A. Herzel. — *Problemi di transvariazione inversa* in « Metron » Vol XIX, n. *1-2*.

relativi alle singole professioni dove si notano le terne di disuguaglianze :

$$\begin{cases} r \text{ (capi az. agr./ufficiali)} \ldots\ldots = 0{,}012 \\ r \text{ (ufficiali/imp. statali)} \ldots\ldots = 0{,}26 \\ r \text{ (capi az. agr./imp. stat.)} \ldots = -0{,}17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \text{ (capi az. agr../prof. univ.)} \ldots = 0{,}17 \\ r \text{ (prof. univ./imp. statali)} \ldots = 0{,}12 \\ r \text{ (capi az. agr./imp. stat.)} \ldots = -0{,}17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \text{ (capi az. ind./magistrati)} \ldots = 0{,}14 \\ r \text{ (magistrati/imp. statali)} \ldots\ldots = 0{,}22 \\ r \text{ (capi az. ind./imp. statali)} \ldots = -0{,}17 \end{cases}$$

SUMMARY

In this article the author gives the proof of the following theorem about the Bravais correlation coefficient :

THEOREM - *Let* (X_i) ; (Y_i) ; (Z_i) ; $(i = 1, 2, \ldots n)$ *be three sequences of reals, the conditions* :

$$r_{XZ} \neq r_{XY} \cdot r_{YZ} ; \qquad r_{YZ} > 0$$

are sufficient for the existence of a sequence (X'_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ *linear combination of* (X_i) *and* (Y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ *so that we have*

$$r_{X'Y} > 0 ; \; r_{YZ} > 0 ; \; r_{X'Z} < 0 ;$$

or

$$r_{X'Z} > 0 ; \; r_{ZY} > 0 ; \; r_{X'Y} < 0 .$$

Besides the author determines, for the above terns of inequalities, the field of existence :

$$r^2_{X'Z} + r^2_{ZY} + r^2_{X'Y} < 1 .$$

AMATO HERZEL

Influenza del raggruppamento in classi sulla probabilità e sull'intensità di transvariazione

Ia PROBABILITÀ DI TRANSVARIAZIONE.

Nella metodologia statistica è nota la probabilità di transvariazione, introdotta dal Gini (1916), quale strumento per misurare la tipicità della differenza fra i valori medi — più precisamente, le mediane — di due seriazioni statistiche.

Se X_1 e X_2 sono due variabili statistiche, con le rispettive funzioni di densità $f_1(X_1)$ e $f_2(X_2)$ e le mediane M_1 e M_2 essendo $M_1 > M_2$, si determina facilmente la probabilità che in una prova sul sistema delle due variabili statistiche, la prima assuma un valore minore della seconda.

Nel campo continuo si trova infatti:

$$p = \int_{-\infty}^{0} f_3(x_3)\, d\, x_3$$

dove:

$$f_3(x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_3 + x_2)\, f_2(x_2)\, d\, x_2$$

è la funzione di densità della variabile statistica $X_3 = X_1 - X_2$, nell'ipotesi che X_1 e X_2 siano indipendenti.

La probabilità di transvariazione, nel caso di distribuzioni simmetriche è data come è noto da:

$$P = 2\, p$$

Nel campo discontinuo, che è quello che più frequentemente si presenta nell'applicazione pratica, si procede così: siano

$$X_1\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \\ f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n \end{pmatrix}; \quad \sum_{k=1}^{n} f_k = N_1$$

$$X_2\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \end{pmatrix}; \quad \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = N_2$$

$$(x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n; \; x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1})$$

due distribuzioni, approssimativamente simmetriche, e sia

$$M_1 > M_2.$$

Il valore di P sarà allora dato da:

$$P = \frac{2\,A_{1,2} + {}_0A_{1,2}}{N_1\,N_2} \tag{1}$$

dove $A_{1,2}$ è il numero delle differenze negative e $A_{1,2}$ il numero delle differenze nulle fra le due variabili X_1 e X_2.

Avremo evidentemente:

$$A_{1,2} = \sum_{l=2}^{n} \left(\varphi_v \sum_{k=1}^{l-1} f_k\right) \tag{2}$$

e:

$${}_0A_{1,2} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_n\, f_n \tag{3}$$

Naturalmente alcune f_k e φ_k $(k = 1, 2, \dots, n-1, n)$ potranno essere nulle; è questo anzi, in pratica il caso più frequente. Supponiamo che f_{i_0} sia la prima frequenza non nulla della prima distribuzione e φ_{j_1} l'ultima frequenza non nulla della seconda distribuzione.

L'intervallo di transvariazione sarà allora uguale a:

$$A = x_{j_1} - x_{i_0},$$

ovvero, se si prende come unità di misura delle ascisse la differenza, che abbiamo supposta costante, di due successive modalità,

$A = j_1 - i_0$ e le espressioni (2) e (3) si trasformeranno rispettivamente in :

$$A_{1,2} = \sum_{l=i_0+1}^{j_1} \left(\varphi_l \sum_{h=i_0}^{l-1} f_h \right) \tag{2,a}$$

$$_0A_{1,2} = \sum_{h=i_0}^{j_1} \varphi_h f_h \tag{3,a}$$

Qui e in seguito si suppone sempre $j_1 \geq i_0$; in caso diverso si ha evidentemente : $P = 0$.

Ci proponiamo ora di indagare quale influenza eserciti sullo indice P il raggruppamento in classi delle due distribuzioni. Supponiamo perciò che le n modalità vengano raggruppate in m classi comprendenti ciascuna s modalità, (s = numero intero). Le variabili originarie vengono in tal modo sostituite dalle seguenti :

$$X'_1 \begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m-1}, x'_m \\ f'_1, f'_2, \ldots, f'_{m-1}, f'_m \end{pmatrix}$$

$$X'_2 \begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m-1}, x'_m \\ \varphi'_1, \varphi', \ldots, \varphi'_{m-1}, \varphi'_m \end{pmatrix}$$

dove :

$$x'_k = \frac{x_{s(k-1)+1} + x_{sk}}{2}$$

$$f'_k = \sum_{h=s(k-1)+1}^{sk} f_h$$

$$\varphi'_k = \sum_{h=s(k-1)1}^{h} \varphi_h$$

Si ottiene, quindi, per le distribuzioni raggruppate :

$$P' = \frac{2A'_{1,2} + {}_0A'_{1,2}}{N_1 N_2} \tag{1,a}$$

dove :

$$A'_{1,2} = \sum_{l=2}^{m} \left(\varphi'_l \sum_{k=1}^{l-1} f'_k \right) = \sum_{l=2}^{m} \left(\sum_{k=s(l-1)+1}^{sl} \varphi_k \sum_{h=1}^{s(l-1)} f_h \right) \tag{2,b}$$

$$_0A'_{1,2} = \sum_{k=1}^{m} \varphi'_k f'_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{h=s(k-1)+1}^{sk} \varphi_h \sum_{h=s(k-1)+1}^{sk} f_h \right) \tag{3,b}$$

Per maggiore semplificazione, supponiamo che il raggruppamento in classi sia stato operato in modo che x_{i_0} sia la modalità più piccola di una classe e x_{j_1} la modalità più grande di un'altra, ossia che l'intervallo di transvariazione coincida con un certo numero di classi. Chiamiamo $x'_{i'_0}$ la modalità delle distribuzioni, corrispondente alla prima e $x'_{j'_1}$ quella corrispondente all'ultima di queste classi. Avremo allora:

$$A'_{1,2} = \sum_{l=i'_0+1}^{j'_1} \left(\varphi'_l \sum_{k=i'_0}^{l-1} f'_k \right) = \sum_{l=i'_0+1}^{j'_1} \left(\sum_{k=s(l-1)+1}^{sl} \varphi_k \sum_{k=i_0}^{s(l-1)} f_k \right) \qquad (2,c)$$

$$_0A'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{j'_1} \varphi_k f'_k = \sum_{k=i'_0}^{j'_1} \left(\sum_{k=s(k-1)+1}^{sk} \varphi_k \sum_{k=s(k-1)+1}^{sk} f_k \right) \qquad (3,c)$$

Se ne ricava facilmente:

$$P - P' = \frac{\sum\limits_{h=i'_1}^{j'_1} \left(\sum\limits_{k=s(h-1)+2}^{sh} \varphi_k \sum\limits_{l=s(h-1)+1}^{k-1} f_l - \sum\limits_{k=s(h-1)+2}^{sh} f_k \sum\limits_{l=s(h-1)+1}^{k-1} \varphi_l \right)}{N_1 N_2} \qquad (4)$$

La differenza, cioè, dipende esclusivamente dai prodotti delle frequenze delle due variabili all'interno di ciascuna classe. Dalla (4) risulta immediatamente che la differenza è nulla se le due variabili sono equidistribuite in ogni classe. In tal caso, quindi, è indifferente operare sulla distribuzione originaria o sulla distribuzione divisa in intervalli.

Supponiamo invece che all'interno di ciascuna classe le frequenze delle due distribuzioni varino in progressione aritmetica, siano cioè allineate su delle rette.

Nel fare ciò, poniamo, per maggiore semplicità, l'origine nella prima modalità dell'intervallo e assumiamo a unità di misura la distanza fra le successive modalità. Potremo quindi scrivere:

$$f_{h,k} = a_{1,h}\,(k - 1) + f_{h,1}$$

$$\varphi_{h,k} = a_{2,h}\,(k - 1) + \varphi_{h,1}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m - 1;\ k = 1, 2, \ldots, s - 1, s)$$

dove $f_{h,k}$ e $\varphi_{h,k}$ rappresentano la frequenza della k esima modalità della classe h esima, rispettivamente della prima e della seconda distribuzione e $a_{1,h}$, $a_{2,h}$ i coefficienti angolari delle rette sulle quali sono allineate tutte le frequenze rispettivamente della prima e della seconda distribuzione nella classe h esima.

Con queste notazioni, la (4) si trasforma in :

$$P - P' = \frac{\sum_{h=i_1'}^{i_1'} \left(\sum_{k=2}^{s} \varphi_{h,k} \sum_{l=1}^{k-1} f_{h,k} - \sum_{k=2}^{s} f_{h,k} \sum_{l=1}^{k-1} \varphi_{h,l} \right)}{N_1 N_2} =$$

$$= \frac{\sum_{h=i_1'}^{i_1'} \left\{ \sum_{k=2}^{s} [a_{2,h}(k-1) + \varphi_{h,1}] \sum_{l=1}^{k-1} [a_{1,h}(l-1) + f_{h,1}] - \right.}{N_1 N_2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left. - \sum_{k=2}^{s} [a_{1,h}(k-1) + f_{h,1}] \sum_{l=1}^{k-1} [a_{2,h}(h-1) + \varphi_{h,1}] \right\}}{N_1 N_2}$$

da cui, sviluppando e semplificando si trae :

$$P - P' = \frac{(s^3 - s) \sum_{h=i_0'}^{i_1'} (a_{2,h} f_{h,1} - a_{1,h} \varphi_{h,1})}{6 N_1 N_2} \tag{5}$$

Dalla (5) si ricava immediatamente che in ogni singolo intervallo, preso isolatamente, si avrà :

$$P \gtrless P' \quad \text{se} \quad \frac{a_2}{\varphi_1} \gtrless \frac{a_1}{f_1} \tag{6}$$

I vari casi che si possono presentare sono sintetizzati nelle seguenti figure (se si scambiano le variabili, le disuguaglianze fra P e P' naturalmente si invertono).

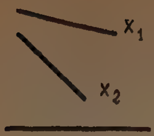


Fig. 1.

$a_2 < a_1 < 0$
$f_1 > \varphi_1$
$P < P'$

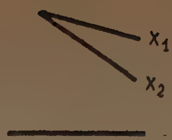


Fig. 2.

$a_2 < a_1 < 0$
$f_1 = \varphi_1$
$P < P'$

Fig. 3.

$a_1 = a_2 < 0$
$f_1 > \varphi_1$
$P < P'$

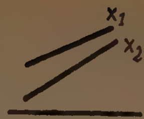


Fig. 4.

$a_2 > a_1 > 0$
$f_1 > \varphi_1$
$P > P'$

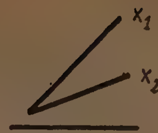


Fig. 5.

$a_1 > a_2 > 0$
$f_1 = \varphi_1$
$P < P'$

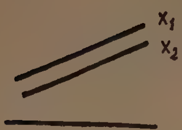


Fig. 6.

$a_1 = a_2 > 0$
$f_1 > \varphi_1$
$P > P'$

Fig. 7.

$a_1 < a_2 = 0$
$P > P'$

Fig. 8.

$a_1 > a_2 = 0$
$P < P'$

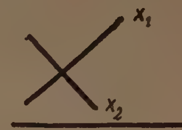


Fig. 9.

$a_1 > 0$
$a_2 < 0$
$P < P'$

Nulla si può invece dire a priori nei seguenti casi:

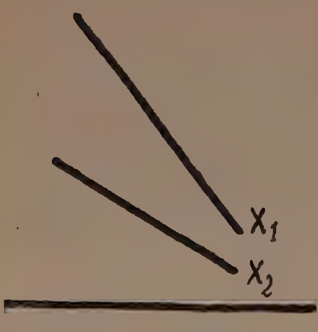


Fig. 10.

$a_1 < a_2 < 0$
$f_1 > \varphi_1$

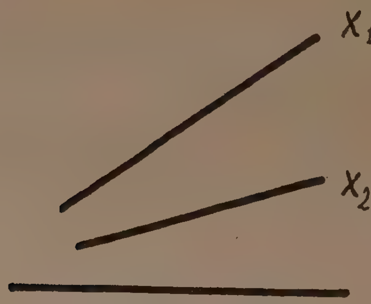


Fig. 11.

$a_1 > a_2 > 0$
$f_1 > \varphi_1$

Combinando insieme due o più delle figure precedenti (o di quelle ottenute con uno scambio delle variabili) e ricordando che la forma delle distribuzioni all'esterno dell'intervallo di transvariazione, è irrilevante ai fini del nostro problema, si potrà in gene-

rale determinare facilmente il segno della differenza $P - P'$. Nella maggior parte dei casi che si presentano all'indagine statistica concreta, tale differenza sarà negativa, cioè la probabilità di transvariazione sarà maggiore se calcolata sulle distribuzioni raggruppate in classi. Valgano i seguenti esempi:

Fig. 12.
(Vedi Fig. 9)

Fig. 13.
(Vedi Fig. 6 con variabili scambiate, Fig. 9 e Fig. 1)

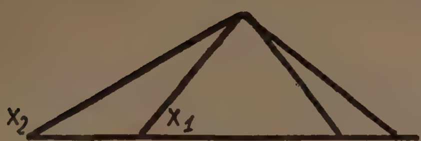


Fig. 14.
(Vedi Fig. 4 con variabili scambiate e Fig. 2)

Fig. 15.
(Vedi Fig. 8 e Fig. 7 con variabili scambiate)

In alcuni casi, tuttavia, la differenza $P - P'$ sarà di segno positivo, come per esempio con certe distribuzioni ad U, o anche unimodali.

La (5), però, pur essendo una formula esatta, naturalmente nei limiti delle ipotesi su cui si fonda, non ci fornisce una correzione per risalire da P' a P, in quanto i parametri a_1, a_2, f_1, φ_1 che in essa figurano sono in generale da supporre ignoti a chi opera su delle distribuzioni raggruppate.

Al fine di giungere per questa via ad una formula praticamente utilizzabile, occorre introdurre un'altra ipotesi, e precisamente che entrambe le variabili siano distribuite linearmente non solo entro ciascuna classe, ma entro le classi prese a due a due, sempre considerando solo l'intervallo di transvariazione. È evidente che in linea generale, questa ipotesi è piuttosto restrittiva e potrà valere con una buona approssimazione solo per classi

non molto grandi. Questa limitazione vale quindi anche per le formule di correzione che si fondano sull'ipotesi suddetta.

In questa ipotesi, avendosi evidente,ente, se $h - i_0'$ è un numero pari :

$$f_{h+1,1} = f_{h,1} + s\, a_{1,h}$$

$$\varphi_{h+1,1} = \varphi_{h,1} + s\, a_{2,h}.$$

mentre :

$$a_{1,h+1} = a_{1,h} \quad \text{e} \quad a_{2,h+1} = a_{2,h}$$

la (5) si trasforma come segue :

$$P - P' = \frac{(s^3 - s) \sum_{h=i_0'}^{i_1'} (a_{2,h}\, f_{h,1} - a_{1,h}\, \varphi_{h,1})}{6\, N_1\, N_2} =$$

$$= \frac{(s^3 - s) \sum_{h=0}^{\frac{i_1'-i_0'-1}{2}} [a_{2,i_0'+2h} (2\, f_{i_0'+2h,1} + s\, a_{1,h_0'+2h}) - a_{1,i_0'+2h} (2\, \varphi_{i_0'+2h,1} + s\, a_{2,i_0'+2h})]}{6\, N_1\, N_2} =$$

$$= \frac{(s^3 - s) \sum_{h=0}^{\frac{i_1'-i_0'-1}{2}} (a_{2,i_0'+2h}\, f_{i_0'+2h,1} - a_{1,i_0'+2h}\, \varphi_{i_0'+2h,1})}{3\, N_1\, N_2} \tag{7}$$

D'altra parte si ha :

$$f'_{i'+2h} = s\, f_{i_0'+2h,1} + \frac{s\,(s - 1)}{2}\, a_{1,i_0'+2h} \tag{8}$$

$$f'_{i_0'+2h+1} = f_{i_0'+2h,1} + \frac{s\,(3\,s - 1)}{2}\, a_{1,i_0'+2h} \tag{9}$$

e quindi :

$$a'_{1,i'+2h} = f'_{i_0'+2h+1} - f'_{i_0'+2h} = s^2\, a_{1,i_0'+2h} \tag{10}$$

dove $a'_{1,i_0'+1h}$ è il coefficiente angolare della retta su cui sono allineate le due frequenze $f'_{i_0'+2h}$ e $f'_{i_0'+2h+1}$ della prima variabile raggruppata in classi, assumendo sempre a unità di misura delle ascisse la distanza fra due modalità successive.

Analogamente, si ottiene per la seconda variabile:

$$\varphi'_{i'_0+1h} = s\,\varphi_{i'_0+2h,1} + \frac{s\,(s-1)}{2}\,a_{2,i'_0+2h} \tag{11}$$

$$\varphi'_{i'_0+2h+1} = s\,\varphi_{i'_0+2h,1} + \frac{s\,(3\,s-1)}{2}\,a_{2,i'_0+2h} \tag{12}$$

$$a'_{2,i'_0+2h} = \varphi'_{i'_0+2h+1} - \varphi'_{i'_0+2h} = s^2\,a_{2,i'_0+2h} \tag{13}$$

Dalla (8) e dalla (10) si ricava:

$$f_{i'_0+2h,1} = \frac{1}{s}\left(f'_{i'_0+2h} - \frac{s-1}{2\,s}\,a'_{1,i'_0+2h}\right) \tag{14}$$

$$a_{1,i'_0+2h} = \frac{a'_{1,i'_0+2h}}{s^2} \tag{15}$$

e analogamente dalla (11) e dalla (13):

$$\varphi_{i'_0+2h,1} = \frac{1}{s}\left(\varphi'_{i'_0+2h} - \frac{s-1}{2\,s}\,a'_{1,i'_0+2h}\right) \tag{16}$$

$$a_{2,i'_0+2h} = \frac{a'_{2,i'_0+2h}}{s^2} \tag{17}$$

Sostituendo le ultime espressioni nella (7) e riducendo si ottiene infine:

$$P - P' = \frac{s^2-1}{s^2}\,\frac{\sum\limits_{h=0}^{\frac{j'_1-i'_0-1}{2}}\left(a'_{2,i'_0+2h}\,f'_{i'_0+2h+1} - a'_{1,i'_0+2h}\,\varphi'_{i'_0+2h+1}\right)}{3\,N_1\,N_2} = \tag{18}$$

$$= \frac{s^2-1}{s^2}\,\frac{\sum\limits_{h=0}^{\frac{j'_1-i'_0-1}{2}}\left(f'_{i'_0+2h}\,\varphi'_{i'_0+2h+1} - \varphi'_{i'_0+2h}\,f'_{i'_0+2h+1}\right)}{3\,N_1\,N_2}$$

Abbiamo supposto finora che l'intervallo di transvariazione fosse diviso in un numero pari di classi. Se invece questo numero fosse dispari, si dovrebbe procedere a qualche adattamento, considerando per esempio la retta interpolatrice fra i primi tre o gli ultimi tre punti, e impiegando i parametri di questa retta opportunamente ponderati, oppure considerando anche una classe contigua all'intervallo di transvariazione.

Un'altra formula di correzione può essere data per il caso, in pratica particolarmente importante, schematizzato nella fig. 12, quando cioè all'intervallo di transvariazione corrisponde il ramo discendente di una curva e quello ascendente dell'altra, con andamento approssimativamente rettilineo.

In tale ipotesi, supposto che le due rette nelle quali sono allineate le frequenze nell'intervallo di transvariazione incontrino l'asse delle ascisse rispettivamente in x_{j_1+1} e x_{i_0-1} il che implica :

$$f_{i_0} = a_1$$

$$\varphi_{j_1} = -a_2$$

e quindi :

$$f_k = f_{i_0} + (k - i_0)\, a_1 = (k + 1 - i_0)\, a_1$$

$$\varphi_k = \varphi_{j_1} - (j_1 - k)\, a_2 = -(j_1 - k + 1)\, a_2$$

$$(i_0 \leq k \leq j_1)$$

si trova con facili passaggi :

$$_0A_{1,2} + 2\,A_{1,2} = -a_1\,a_2 \left[\sum_{k=i_0}^{j_1} (j_1 - k + 1)\,(k + 1 - i_0) + \right. \tag{19}$$

$$\left. + 2 \sum_{k=i_0+1}^{j_1} (j_1 - k + 1) \sum_{l=1}^{k-1} (l + 1 - i_0) \right] = -\frac{a_1\,a_2}{12}\,(t+1)\,(t+2)^2\,(t+3)$$

D'altra parte si ha :

$$f'_{i_0}{}' = \frac{a_1\,(s+1)\,s}{2}$$

$$\varphi'_{j_1}{}' = -\frac{a_2\,(s+1)\,s}{2}$$

e quindi:

$$f'_k = (k - i'_0)\, a_1 s^2 + f' i'_0 = a_1 s \left[(k - i'_0)\, s + \frac{s + 1}{2} \right]$$

$$\varphi'_k = -(j'_1 - k)\, a_2 s^2 + \varphi' j'_1 = -a_2 s \left[(j'_1 - k)\, s + \frac{s + 1}{2} \right]$$

(per $i'_0 \leq k \leq j'_1$)

Sviluppando e riducendo si trova:

$$ {}_0A'_{1,2} + 2\, A'_{1,2} = -a_1 a_2 s^2 \left\{ \sum_{k=i'_0}^{j'_1} \left[(k - i'_0)\, s + \frac{s+1}{2} \right] \left[(j'_1 - k)\, s + \frac{s+1}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k=i'_0+1}^{j'_1} \left[(j'_1 - k)\, s + \frac{s + 1}{2} \right] \sum_{l=i'_0}^{k-1} \left[(k - i'_0)\, s + \frac{s + 1}{2} \right] \right\} = \quad (20)$$

$$= -\frac{a_1 a_2 s^2 (t' + 1)(t' s + s + 1)(t'^2 s + 2 t' s + 3 t' + 3 s + 3)}{12}.$$

dove:

$$t' = j'_1 - i'_0 = \frac{t + 1 - s}{s}.$$

Sostituendo nella (19): $t = t' s + s - 1$, si ottine infine:

$$\frac{P}{P'} = \frac{{}_0A_{1,2} + 2\, A_{1,2}}{{}_0A'_{1,2} + 2\, A'_{1,2}} = \frac{(t' s + s + 1)(t' s + s + 2)}{s\,(t'^2 s + 2 t' s + 3 t' + 3 s + 3)} \qquad (21)$$

Questa formula, rispetto alla (18), è di calcolo più comodo, ma, come è stato chiarito sopra, è di più limitata applicazione, poichè si fonda su ipotesi meno generali.

Concludendo su questa parte del presente lavoro, riassumiamo ora brevemente i risultati cui siamo pervenuti. L'influenza

che il raggruppamento in classi esercita sulla probabilità di transvariazione dipende essenzialmente dalla forma delle distribuzioni. Si può tuttavia affermare che nei casi che più spesso s'incontrano in pratica, il raggruppamento in classi fa aumentare il valore di detto indice. Si sono anche trovate due formule correttive di facile calcolo, fondate però su condizioni alquanto restrittive che si possono supporre verificate solo per classi non troppo ampie.

Intensità di transvariazione.

L'intensità di transvariazione, introdotta parimenti dal Gini, rappresenta un'altra importante misura della tipicità della differenza fra valori medi in questo caso non le mediane, ma le medie aritmetiche di due seriazioni statistiche. Essa è data dalla somma dei valori assoluti delle differenze tra le intensità delle distribuzioni che hanno segno contrario alla differenza tra le rispettive medie aritmetiche, ragguagliata al massimo che si ottiene mediante una traslazione di una delle due curve che fa coincidere le due medie aritmetiche.

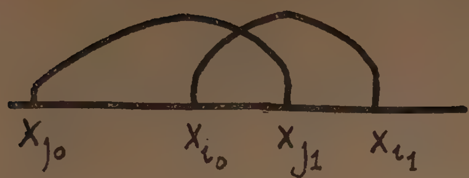
Concretamente, l'intensità di transvariazione, nel discontinuo, può essere espressa nel modo seguente :

$$I = \frac{B_{1,2}}{Max, B_{1,2}} = \frac{\Sigma f_k \Sigma (l-k)\,\varphi_l + \Sigma f_k \Sigma (l-k)\,\varphi_l}{\Sigma f_k \Sigma (l-k+C+c)\,\varphi_l + \Sigma f_k \Sigma (l-k+C+c)\,\varphi_l} \quad (22)$$

dove C è il massimo numero intero contenuto nella differenza fra le due medie aritmetiche : $D = A_1 - A_2$ e $c = D - C$,

Gli estremi dei sommatori (che possono anche ridursi a due : uno al numeratore e uno a denominatore) dipendono da D e dalla posizione degli estremi dei campi di variazione delle due distribuzioni. Dobbiamo quindi esaminare partitamente i diversi casi che si possono presentare. Chiameremo nel seguito x_{j_0} e x_{j_1} gli estremi del campo di variazione della 2ª distribuzione (con media aritmetica minore) e x_{i_0} e x_1 gli estremi del campo di variazione della 1ª, distribuzione (con media aritmetica maggiore). Avremo quindi : $t = x_{j_1} - x_{i_0} = j_1 - i_0$

Caso I.



$$i_0 < i_0 < j_1 < j_1$$

In questo caso avremo:

$$B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{i_1-1} f_k \sum_{l=k+1}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l \tag{23}$$

Per $Max\,.\,B_{1,2}$ si avranno invece diverse varianti a seconda che:

$$C \gtreqless i_1 - j_1 \quad \text{e} \quad C \gtreqless i_0 - j_0$$

Variante 1ª)

$$C \geq i_1 - j_1 \quad \text{e} \quad C > i_0 - j_0$$

In questo caso si ha:

$$Max,\, B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{j_0+C-1} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l + \sum_{k=j_0+C}^{i_1} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l$$

Questa espressione è, evidentemente, indipendente dall'origine. Possiamo, quindi, senza alcuna perdita di generalità, semplificarla alquanto, ponendo, come del resto si fa in pratica, $j_0 = 1$. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} Max,\, B_{1,2} = &\sum_{k=i_0}^{C} f_k \sum_{l=1}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l + \\ &+ \sum_{k=C+1}^{i_1} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l \end{aligned} \tag{24}$$

Se raggruppiamo le modalità in classi da s modalità ciascuna, avremo analogamente :

$$B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{j'_1-1} f'_k \sum_{l=k+1}^{j'_1} (l-k)\,\varphi'_l \qquad (25)$$

$$\begin{aligned} Max.\, B_{1,2} &= \sum_{k=i'_0}^{j'_0+\varphi'-1} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l-k+C'+c')\,\varphi'_l + \\ &+ \sum_{k=j'_0+\varphi'}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l-k+C'+c')\,\varphi'_l \end{aligned} \qquad (26)$$

designando, con $x_{i'_0}$, $x_{i'_1}$; $x_{j'_0}$, $x_{j'_1}$ gli estremi dei campi di variazione delle variabili divise in intervalli, mentre C' e c' sono la parte intera e la parte frazionaria della differenza frà le medie aritmetiche, preso s come unità di misura. Qui, e in seguito, si suppone che il raggruppamento in classi sia tale da coprire esattamente i campi di variazione e il campo di transvariazione, che cioè x_{j_0} e x_{i_0} siano gli estremi sinistri di certe classi e x_{j_1} e x_{i_1} gli estremi destri di altre. Si avrà quindi, applicando anche alle variabili divise in intervalli, la semplificazione di porre uguale a 1 l'estremo sinistro dell'intervallo di transvariazione :

a) $j_0 = j'_0 = 1$

b) $i_0 = s\,(i'_0 - 1) + 1$

c) $j_1 = s\,j'_1$

d) $i_1 = s\,i'_1$

Supponiamo inoltre che siano verificate le seguenti condizioni :

e) $C = s\,C'$

f) $c = s\,c'$

$$
g \begin{cases}
B_{1,2} = {}_0\bar{f}\,{}_0\bar{\varphi} \sum\limits_{k=i_0}^{i_1-1} \sum\limits_{l=k+1}^{i_1} (l-k) \\[2ex]
B'_{1,2} = {}_0\bar{f}'\,{}_0\bar{\varphi}' \sum\limits_{k=i'_0}^{i'_1-1} \sum\limits_{l=k+1}^{i'_1} (l-k) \\[2ex]
({}_0\bar{f}' = s\,{}_0\bar{f}\,,\; {}_0\bar{\varphi}' = s\,{}_0\bar{\varphi})
\end{cases}
$$

$$
h \begin{cases}
Max.\,B_{1,2} = {}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\,[\Sigma\,\Sigma\,(l-k+C+c) + \Sigma\,\Sigma\,(l-k+C+c)] \\[1ex]
Max.\,B'_{1,2} = {}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}'\,[\Sigma\Sigma\,(l-k+C'+c') + \Sigma\Sigma\,(l-k+C'+c')] \\[1ex]
({}_1\bar{f}' = s\,{}_1\bar{f}\,,\; {}_1\bar{\varphi}' = s\,{}_1\bar{\varphi})
\end{cases}
$$

Gli estremi degli ultimi sommatori differiscono da variante a variante. Per la variante che stiamo esaminando, essi sono determinati dalla (24) e dalla (26) e la condizione h) pertanto si scrive come segue:

$$
Max,\,B_{1,2} = {}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\left[\sum_{k=i_0}^{C} \sum_{l=1}^{i_1} (l-k+C+c) + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{k=C+1}^{i_1} \sum_{l=k-C}^{i_1} (l-k+C+c)\right]
$$

$$
Max.\,B'_{1,2} = {}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}'\left[\sum_{k=i'_0}^{C} \sum_{l=1}^{i'_1} (l-k+C'+c') + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{k=C'+1}^{i'_1} \sum_{l=k-C'}^{i'_1} (l-k+C'+c')\right]
$$

$$
({}_1\bar{f}' = s\,{}_1\bar{f}\,,\; {}_1\bar{\varphi} = s\,{}_1\bar{\varphi})
$$

I simboli ${}_0\bar{f}\,,\,{}_0\bar{\varphi}\,;\,{}_1\bar{f}\,,\,{}_1\bar{\varphi}$ rappresentano valori medi (non necessariamente medie aritmetiche) delle frequenze delle due distri-

buzioni originarie rispettivamente nell'intervallo effettivo di transvariazione e in quello che si viene a creare con la traslazione che fa coincidere le due medie aritmetiche. I simboli ${}_0\bar{f}'$, ${}_0\bar{\varphi}'$; ${}_1\bar{f}'$, ${}_1\bar{\varphi}'$ hanno lo stesso significato per le variabili divise in intervalli. Le ipotesi ${}_0\bar{f}' = s\,{}_0\bar{f}$, ${}_0\bar{\varphi}' = s\,{}_0\bar{\varphi}$ ecc., si giustificano con le relazioni:

$$\bar{f}' = \frac{\sum_{k=i_0'}^{i_1'} f_k'}{i_1' - i_0' + 1} = \frac{s \sum_{k=i_0}^{i_1} f_k}{i_1 - i_0 + 1} = s\bar{f}$$

$$\bar{\varphi}' = \frac{\sum_{k=j_0'}^{j_1'} \varphi_k'}{j_1' - j_0' + 1} = \frac{s \sum_{k=j_0}^{j_1} \varphi_k}{j_1 - j_0 + 1} = s\bar{\varphi}$$

Le condizioni ora enunciate in generale sono compatibili e definiscono, dati i_0, , i_1, j_0, j_1, C e c, un insieme infinito di coppie di distribuzioni, che possono assumere numerose forme, notevolmente diverse una dall'altra.

Indicando con ${}_tB_{1,2}$, ${}_tB_{1,2}'$, $Max,\,{}_tB_{1,2}$, $Max,\,{}_tB_{1,2}'$, i valori che $B_{1,2}$, $B_{1,2}'$, $Max,\,B_{1,2}$, e $Max,\,B_{1,2}'$ assumono nel caso che le due variabili soddisfino alle condizioni sopra enunciate si ottiene con facili calcoli:

$$ {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_0\bar{f}\,{}_0\bar{\varphi}\,s\,(s\,t' + s - 1)\,(s\,t' + s + 1)\,(t' + 1) \tag{27}$$

$$ {}_tB_{1,2}' = \frac{1}{6}\,{}_0\bar{f}'\,{}_0\bar{\varphi}'\,t'\,(t' + 1)\,(t' + 2) \tag{28}$$

$$\left(\text{dove } t' = j_1' - i_0' = \frac{t - s + 1}{s}\right)$$

$$\begin{aligned} Max.\,{}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\,s\,[&O\,(s\,O + 1)\,(s\,O_1 - 1 + 3\,s\,c') - \\ &- P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c') - Q\,(s\,Q + 1)\,(s\,Q - 1 + 3\,s\,c')] \end{aligned} \tag{29}$$

$$Max., {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}'\, {}_1\bar{\varphi}' \,[O\,(O+1)\,(O-1+3\,c') -$$

$$-P\,(P+1)\,(P-1+3\,c') - Q\,(Q+1)\,(Q-1+3\,c')] \qquad (30)$$

dove si è posto, per comodità di scrittura:

$$t' + C' + 1 = O$$

$$j'_1 + C' - i'_1 = P$$

$$C' - i'_1 + 1 = Q$$

Ricordando che ${}_0\bar{f}' = s\, {}_0\bar{f}$, ${}_0\bar{\varphi}' = s\, {}_0\bar{\varphi}$, ${}_1\bar{f}' = s\, {}_1\bar{f}$, ${}_1\bar{\varphi}' = s\, {}_1\bar{\varphi}'$, si ricava immediatamente:

$$\frac{{}_tJ}{{}_tJ'} = \frac{{}_tB_{1,2}}{{}_tB'_{1,2}} \cdot \frac{Max.\, {}_tB'_{1,2}}{Max.\, {}_tB_{1,2}} =$$

$$= \frac{(s\,t' + s - 1)\,(s\,t' + s + 1)\,[O\,(O+1)\,(O-1+3\,c') -}{t'\,(t'+2)\,[O\,(s\,O+1)\,(s\,O-1+3\,s\,c') -} \cdot \qquad (31)$$

$$\cdot \frac{-P\,(P+1)\,(P-1+3\,c') - Q\,(Q+1)\,(Q-1+3\,c')]}{-P\,(s\,P+1)\,(s\,P-1+3\,s\,c') - Q\,(s\,Q+1)\,(s\,Q-1+3\,sc')]}$$

Variante 2)

$$i_0 - j_0 \geq C \geq i_1 - j_1$$

$$(i'_0 - 1 \geq C' \geq i'_1 - j'_1)$$

$$Max., B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{i_1} f_k \sum_{l=k-\varphi}^{j_1} (l - k + C + c)\, \varphi_l$$

$$Max., B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + c')\, \varphi'_l$$

Se ne ricava:

$$Max.\, {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}\, {}_1\bar{\varphi}\, s\,[O\,(s\,O+1)\,(s\,O-1+3\,s\,c') -$$

$$-P\,(s\,P+1)\,(s\,P-1+3\,s\,c')] \qquad (32)$$

$$Max.\ {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}'\, {}_1\bar{\varphi}' [O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') -$$

$$- P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c')] \tag{33}$$

e quindi :

$$\frac{{}_tI}{{}^tI'} = \frac{(s\,t' + s - 1)\,(s\,t' + s + 1)\,[O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') -}{t'\,(t' + 2)\,[O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') -} \cdot$$

$$\cdot \frac{- P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c')]}{- P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c')]} \tag{34}$$

Variante 3)

$$i_1 - j_1 \geq C > i_0 - j_0$$

$$(i'_1 - j'_1 \geq C' > i'_0 - j'_0)$$

$$Max.\ B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{C} f_k \sum_{l=1}^{j_1} (l - k + C + c)\,\varphi_l + \sum_{k=C+1}^{j_1+C} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l - k + C + c)\,\varphi_l$$

$$Max.\ B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{C'} f'_k \sum_{l=1}^{j'_1} (l - k + C' + c')\,\varphi'_l +$$

$$+ \sum_{C'+1}^{j'_1+'C} f'_k \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + c']\,\varphi'_l$$

e quindi :

$$Max.\ {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}\, {}_1\bar{\varphi}\, s\, [O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') -$$

$$- Q\,(s\,Q + 1)\,(s\,Q - 1 + 3\,s\,c')] \tag{35}$$

$$Max.\ {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}'\, {}_1\bar{\varphi}' [O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') -$$

$$- Q\,(Q + 1)\,(Q - 1 + 3\,c')] \tag{36}$$

$$\frac{{}_tJ}{{}_tJ'} = \frac{(s\,t' + s - 1)\,(s\,t' + s + 1)\,[O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') -}{t'\,(t' + 2)\,[O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') -} \cdot \tag{37}$$

$$\cdot \frac{- Q\,(Q + 1)\,(Q - 1 + 3\,c')]}{- Q\,(s\,Q + 1)\,(s\,Q - 1 + 3\,s\,c')]}$$

Variante 4)

$$i_1 - j_1 > \varphi\,;\; i_0 - j_0 > y$$

$$(i'_1 - j'_1 > \varphi'\,,\; i'_0 - j'_0 > \varphi')$$

$$Max.\ B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{j_1+\varphi} f_k \sum_{l=k+\varphi}^{j_1} (l - k + \varphi + c)\,\varphi_l$$

$$Max.\ B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{j'_1+\varphi'} f'_k \sum_{l=k-\varphi'}^{j'_1} (l - k + \varphi' + c')\,\varphi'_l$$

$$Max.\ {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\,s\,O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') \tag{38}$$

$$Max.\ {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}'\,O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') \tag{39}$$

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{(s\,t' + s - 1)\,(s\,t' + s + 1)\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c')}{t'\,(t' + 2)\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c')} \tag{40}$$

Vi è ancora da osservare che, ove si abbia:

$$D = \frac{1}{2}\,(i_1 - j_1 + i_0 - j_0)$$

le condizioni su cui si fondano le formule da noi ricavate vengono soddisfatte anche dalle coppie di distribuzione che hanno tutte le ordinate allineate su rette parallele all'asse delle ascisse, per cui si verifichino, cioè le eguaglianze:

$$f_{i_0} = f_{i_0+1} = \ldots = f'_{i_1-1}\,,\; f_{i_1} = \bar{f}\,;\quad \varphi_{j_0} = \varphi_{j_0+1} = \ldots = \varphi_{j_1-1} = \varphi_{j_1} = \bar{\varphi}$$

A queste distribuzioni si applicheranno quindi la (32), (33), (34) se $i_0 - j_0 \geq i_1 - j_1$ e le (35), (36) e (37) se $i_0 - j_0 \leq i_1 - j_1$. Ove si osservi che c e c' possono assumere solo i valori O e $\frac{1}{2}$ e che la condizione $c = s\,c'$ implica $c = c' = O$ e quindi $C = \frac{1}{2}(i_1 - j_1 + i_0 - j_0)$ mentre si ha evidentemente: ${}_0\bar{f} = {}_1\bar{f} = \bar{f}$; ${}_0\bar{\varphi} = {}_1\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$; ${}_0\bar{f}' = {}_1\bar{f}' = \bar{f}' = s\,\bar{f}$; ${}_0\bar{\varphi}' = {}_1\bar{\varphi}' = \bar{\varphi}' = s\,\bar{\varphi}$, si ricava facilmente, per $i_0 - j_0 \geq i_1 - j_1$; lasciando cadere la condizione: $j = j_1 = j_1' = 1$:

$$I = \frac{4\,(j_1 - i_0)\,(j_1 - i_0 + 1)\,(j_1 - i_0 + 2)}{(i_1 - i_0 + 1)\,[(i_1 - i_0 + 3)\,(i_1 - i_0 - 1) + 3\,(j_1 - j_0 + 1)^2]} =$$

$$= \frac{4\,(j_1' - i_0' + 1)\,(s\,j_1' - s\,i_0' + s - 1)\,(s\,j_1' - s\,i_0' + s + 1)}{(i_1' - i_0' + 1)\,[(s\,i_1' - s\,i_0' + s + 2)\,(s\,i_1' - s\,i_0' + s - 2) + 3\,s^2\,(j_1' - j_0' + 1)^2]} \qquad (41)$$

$$I' = \frac{4\,(j_1' - i_0')\,(j_1' - i_0' + 1)\,(j_1' - i_0' + 2)}{(i_1' - i_0' + 1)\,[(i_1' - i_0' + 3)\,(i_1' - i_0' - 1) + 3\,(j_1' - j_0' + 1)^2]} =$$

$$= \frac{4\,(j_1 - i_0 + 1 - s)\,(j_1 - i_0 + 1)\,(j_1 - i_0 + 1 + s)}{(i_1' - i_0' + 1)\,[(i_1 - i_0 + 1 + 2\,s)\,(i_1 - i_0 + 1 - 2\,s) + 3\,(j_1 - j_0 + 1)^2]} \qquad (42)$$

L'ultima formula rimane naturalmente valida anche se s non è maggiore di 1, come finora abbiamo sempre presupposto, ma minore, quando cioè le modalità non vengono raggruppate, ma suddivise, mentre le frequenze rimangono costanti. Possiamo perciò scrivere:

$$\lim_{s \to 0} I' = \frac{4\,(j_1 - i_0 + 1)^3}{(i_1 - i_0 + 1)\,[(i_1 - i_0 + 1)^2 + 3\,(j_1 - j_0 + 1)^2]} =$$

$$= \frac{4\,(x_{j_1} - x_{i_0} + 1)^3}{(x_{i_1} - x_{i_0} + 1)\,[(x_{i_1} - x_{i_0} + 1)^2 + 3\,(x_{j_1} - x_{j_0} + 1)^2]} \qquad (43)$$

Ma per $s \to O$, le due distribuzioni tendono naturalmente a distribuzioni continue rettangolari. I parametri $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{j_0}, x_{j_1}$ corrispondono invece a distribuzioni discontinue che si possono immaginare derivate dalle continue mediante un raggruppamento

in classi di ampiezza 1, di cui $x_{j_0}, x_{j_0+1} \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1}$ rappresentano i punti centrali. È facile convincersi perciò che, se chiamiamo ${}_cx_{i_0}, {}_cx_{i_0}, {}_cx_{j_0}, {}_cx_{j_1}$ le ascisse degli estremi rispettivamente della prima e della seconda distribuzione nel continuo , si avrà :

$$x_{j_1} - x_{i_0} = {}_cx_{j_1} - {}_cx_{i_0} - 1$$

$$x_{i_1} - x_{i_0} = {}_cx_{i_1} - {}_cx_{i_0} - 1$$

$$x_{j_1} - x_{j_0} = {}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0} - 1$$

Sostituendo nella (43), si ottiene perciò per le distribuzioni rettangolari di questo tipo :

$${}_cJ = \frac{4\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{i_0})^3}{({}_cx_{i_0} - {}_cx_{i_0})\,[({}_cx_{i_1} - {}_cx_{i_0})^2 + 3\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{i_0})^2]} \qquad (44)$$

Quest'ultima formula può naturalmente essere ricavata con facilità anche per via diretta ed è valida anche quando $c \neq 0$.

Per $i_0 - j_0 \leq i_1 - j_1$ si ha analogamente, valendosi delle (27) (28), (35) e (36), in caso di equidistribuzione :

$$I = \frac{4\,(j_1 - i_0)\,(j_1 - i_0 + 1)\,(j_1 - i_0 + 2)}{(j_1 - j_0 + 1)\,[3\,(i_1 - i_0 + 1)^2 + (j_1 - j_0 + 3)\,(j_1 - j_0 - 1)]} =$$

$$= \frac{4\,(j_1' - i_0' + 1)\,(s\,j_1' - s\,i_0' + s - 1)\,(s\,j_1' - s\,i_0' + s + 1)}{(j_1' - j_0' + 1)\,[3\,s^2\,(i_1' - i_0' + 1)^2 + (s\,j_1' - s\,j_0' + s + 2)\,(s\,j_1' - s\,j_0' + s - 2)]} \qquad (45)$$

$$I' = \frac{4\,(j_1' - i_0')\,(j_1' - i_0' + 1)\,(j_1' - i_0' + 2)}{(j_1' - j_0' + 1)\,[3\,(i_1' - i_0' + 1)^2 + (j_1' - j_0' + 3)\,(j_1' - j_0' - 1)]} =$$

$$= \frac{4\,(j_1 - j_0 + 1 - s)\,(j_1 - i_0 + 1)\,(j_1 - j_0 + 1 + s)}{(j_1 - j_0 + 1)\,[3\,(i_1 - i_0 + 1)^2 + (j_1 - j_0 + 1 + 2\,s)\,(j_1 - j_0 + 1 - 2\,s)]} \qquad (46)$$

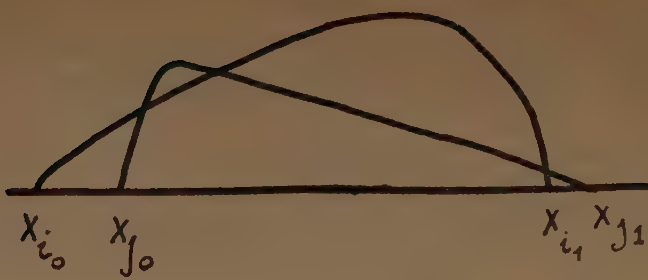
e quindi :

$${}_cI = \lim_{s \to 0} I' = \frac{4\,(j_1 - i_0 + 1)^3}{(j_1 - j_0 + 1)\,[3\,(i_1 - i_0 + 1)^2 + (j_1 - j_0 + 1)^2]} =$$

$$= \frac{4\,(x_{j_1} - x_{i_0} + 1)^3}{(x_{j_1} - x_{j_0} + 1)\,[3\,(x_{i_1} - x_{i_0} + 1)^2 + (x_{j_1} - x_{j_0} + 1)^2]} = \qquad (47)$$

$$= \frac{4\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{i_0})^3}{({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})\,[3\,({}_cx_{i_1} - {}_cx_{i_0})^2 + ({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})^2]}$$

Caso II.



$$i_0 < j_0 < i_1 < j_1$$

Questo caso in pratica non molto frequente, richiede una asimmetria sinistra della distribuzione 1 e una asimmetria destra nella distribuzione 2 e non trova quindi applicazione a variabili equidistribuite.

Si ha allora:

$$B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{j_0-1} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l + \sum_{k=j_0}^{i_1} f_k \sum_{l=k+1}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l$$

ossia, ponendo $i_0 = 1$:

$$B_{1,2} = \sum_{k=1}^{j_0-1} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l + \sum_{k=j_0}^{i_1} f_k \sum_{l=k+1}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l \tag{48}$$

e similmente ponendo $i'_0 = 1$:

$$B'_{1,2} = \sum_{k=1}^{j'_0-1} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l-k)\,\varphi'_l + \sum_{k=j'_0}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k+1}^{j'_1} (l-k)\,\varphi'_l \tag{49}$$

Si ha, poi, sempre ponendo $i_0 = i'_0 = 1$

$$\begin{aligned} Max, B_{1,2} = & \sum_{k=1}^{C+j_0} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l + \\ & + \sum_{k=C+j_0+1}^{i_1} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l \end{aligned} \tag{50}$$

$$Max.\, B'_{1,2} = \sum_{k=1}^{\varphi'+j'_0} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l - k + C' + c')\, \varphi'_l \, + \tag{51}$$

$$+ \sum_{k=C'+j'_0+1}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + i')\, \varphi'_l$$

Supporremo ora verificate le solite condizioni che ora si scrivono così:

a') $i_0 = i'_0 = 1$

b') $j_0 = s\,(j'_0 - 1) + 1$)

$$g')\begin{cases} B_{1,2} = {}_0\bar{f}\,{}_0\bar{\varphi}\left[\sum\limits_{k=1}^{j_0-1}\sum\limits_{l=j_0}^{j_1}(l-k) + \sum\limits_{k=j_0}^{i_1}\sum\limits_{l=k+1}^{j_1}(l-k)\right] \\ B'_{1,2} = {}_0\bar{f}'\,{}_0\bar{\varphi}'\left[\sum\limits_{k=1}^{j'_0-1}\sum\limits_{l=j'_0}^{j'_1}(l-k) + \sum\limits_{k=j'_0}^{i'_1}\sum\limits_{l=k+1}^{j'_1}(l-k)\right] \\ ({}_0\bar{f}' = s\,{}_0\bar{f}\,;\ {}_0\bar{\varphi}' = s\,{}_0\bar{\varphi}) \end{cases}$$

$$h')\begin{cases} Max.\, B_{1,2} = {}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\left[\sum\limits_{k=1}^{\varphi+j_0}\sum\limits_{l=j_0}^{j_1}(l-k+C+c) + \sum\limits_{k=\varphi+j_0+1}^{i_1}\sum\limits_{l=k-\varphi}^{j_1}(l-k+C+c)\right] \\ Max.\, B'_{1,2} = {}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}'\left[\sum\limits_{k=1}^{\varphi'+j'_0}\sum\limits_{l=j'_0}^{j'_1}(l-k+C'+c') + \sum\limits_{k=C'+j'_0+1}^{i'_1}\sum\limits_{l=k-C'}^{j'_1}(l-k+C'+c')\right] \end{cases}$$

le condizioni c), d), e), f) rimanendo naturalmente invariate.

Avremo allora:

$${}_tB_{1,2} = \frac{{}_0\bar{f}\,{}_0\bar{\varphi}\, s\,[(s\,j'_1 - 1)\, j'_1\,(s\,j'_1 + 1) - (s\,j'_1 - s\,i'_1 - 1)\,(j'_1 - i'_1)}{6} + \tag{52}$$

$$- \frac{(s\,j'_1 - s\,i'_1 + 1) - (s\,j'_0 - s - 1)\,(j'_0 - 1)\,(s\,j'_0 - s + 1)]}{6}$$

$${}_tB'_{1,2} = \frac{{}_0\bar{f}'\,{}_0\bar{\varphi}'\,[(j'_1 - 1)\, j'_1\,(j'_1 + 1) - (j'_1 - i'_1 - 1)\,(j'_1 - i'_1)\,(j'_1 - i'_1 + 1)}{6} + \tag{53}$$

$$- \frac{(j'_0 - 2)\,(j'_0 - 1)\, j'_0]}{6}$$

$$\text{Max.}\ {}_tB_{1,2} = \frac{{}_1\bar{f}_1\varphi\, s[O'(sO'+1)(sO'-1+3sc') - P(sP+1)(sP-1+3sc')}{6} + \tag{54}$$

$$\cdot \frac{-Q'(sQ'+1)(sQ'-1+3sc')]}{6}$$

$$\text{Max.}\ {}_tB'_{1,2} = \frac{{}_1\bar{f}'_1\bar{\varphi}'[O'(O'+1)(O'-1+3c') - P(P+1)(P-1+3c')}{6} + \tag{55}$$

$$- \frac{Q'(Q'+1)(Q'-1+3c')]}{6}$$

dove si è posto :

$$O' = j'_1 + \varphi'$$

$$P = j'_1 - i'_1 + \varphi'$$

$$Q' = j'_0 + \varphi' - 1$$

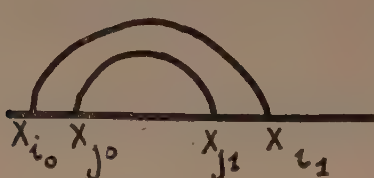
si ottiene infine :

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{[(sj'_1 - 1)\,j'_1\,(sj'_1 + 1) - (sj'_1 - si'_1 - 1)(j'_1 - i'_1)(sj'_1 - si'_1 + 1)}{[(j'_1 - 1)\,j'_1\,(j'_1 + 1) - (j'_1 - i'_1 - 1)(j'_1 - i'_1)(j'_1 - i'_1 + 1) +} +$$

$$\cdot \frac{-(sj'_0 - s - 1)(j'_0 - 1)(sj'_0 - s + 1)]\,[O'(O'+1)(O'-1+3c')}{-(j'_0 - 2)(j'_0 - 1)\,j'_0]\,[O'(sO'+1)(sO'-1+3sc') +} + \tag{56}$$

$$\cdot \frac{-P(P+1)(P-1+3c') - Q'(Q'+1)(Q'-1+3c')]}{-P(sP+1)(sP-1+3sc') - Q'(sQ'+1)(sQ'-1+3sc')]}$$

Caso III.



$$i_0 < j_0 < j_1 < i_1$$

Si ha :

$$B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{j_0-1} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l + \sum_{k=j_0}^{j_1-1} f_k \sum_{l=k+1}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l$$

$$B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{j'_0-1} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_0} (l-k)\,\varphi'_l + \sum_{k=j'_0}^{j'_1-1} f'_k \sum_{l=k+1}^{j'_1} (l-k)\,\varphi'_l$$

ovvero, ponendo : $i_0 = i'_0 = 1$:

$$B_{1,2} = \sum_{k=1}^{j_0-1} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l + \sum_{k=i_0}^{j_1-1} f_k \sum_{l+k+1}^{j_1} (l-k)\,\varphi_l$$

$$B'_{1,2} = \sum_{k=1}^{j'_0-1} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l-k)\,\varphi'_l + \sum_{k=i'_0}^{j'_1-1} f'_k \sum_{l=k+1}^{j'_1} (l-k)\,{}_t\varphi'_l$$

Ponendo le nostre solite condizioni c), d), e), f), la condizione b′) e la condizione seguente, variante della condizione g) :

$$g'')\begin{cases} B_{1,2} = {}_0\bar{f}\,{}_0\bar{\varphi}\left[\sum_{k=1}^{j_0-1}\sum_{l=j_0}^{j_1}(l-k) + \sum_{k=j_0}^{j_1-1}\sum_{l=k+1}^{j_1}(l-k)\right] \\ B'_{1,2} = {}_0\bar{f}'\,{}_0\bar{\varphi}'\left[\sum_{k=1}^{j'_0-1}\sum_{l=j'_0}^{j'_1}(l-k) + \sum_{k=j'_0}^{j'_1-1}\sum_{l=k+1}^{j'_1}(l-k)\right] \\ ({}_0\bar{f}' = s\,{}_0\bar{f}\,,\ {}_0\bar{\varphi}' = s\,{}_0\bar{\varphi}) \end{cases}$$

si ottiene :

$$\begin{aligned} {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_0\bar{f}\,{}_0\bar{\varphi}\,s\,[&j'_1\,(s\,j'_1 - 1)\,(s\,j'_1 + 1) - (j'_1 - 1)\,\cdot \\ &\cdot (s\,j'_0 - s + 1)\,(s\,j'_0 - s - 1)] \end{aligned} \tag{56}$$

$${}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_0\bar{f}'\,{}_0\bar{\varphi}'\,[j'_1\,(j'_1 - 1)\,(j'_1 + 1) - (j'_0 - 1)\,j'_0\,(j'_0 - 2)] \tag{57}$$

Max. ${}_tB_{1,2}$ e *Max.* ${}_tB'_{1,2}$ possono assumere due valori diversi, a seconda che si abbia : $C \geq i_1 - j_1$ $(C \geq i'_1 - j'_1)$ o $C \leq i_1 - j_1$ $(C \leq i'_1 - j'_1)$

Variante I

$C \geq i_1 - j_1$ (ossia $C \geq i'_1 - j'_1$)

In questo caso si ha :

$$Max.\ B_{1,2} = \sum_{k=1}^{C+j_0} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l + \sum_{k=C+j_0+1}^{i_1} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l-k+C+c)\,\varphi_l$$

$$Max.\, B'_{1,2} = \sum_{k=1}^{C'+j'_0} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l - k + C' + c')\, \varphi'_l +$$

$$+ \sum_{k=C'+j'_0+1}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + c')\, \varphi'_l\, .$$

Tali espressioni coincidono con quelle del caso II.

Se, oltre alle condizioni predette è soddisfatta anche la condizione :

$$\text{h}'')\left\{\begin{aligned} & Max.\, B_{1,2} = {}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\left[\sum_{k=1}^{C+j_0}\sum_{l=j_0}^{j_1}(l-k+C+c) + \sum_{k=C=j_0+1}^{i_1}\sum_{l=k-C}^{j_1}(l-k+C+c)\right] \\ & Max.\, B'_{1,2} = {}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}'\left[\sum_{k=1}^{C'+j'_0}\sum_{l=i'_0}^{j'_0}(l-k+C'+c') + \sum_{k=C'+j'_0+1}^{i'_1}\sum_{l=k-C'}^{j'_1}(l-k+C'+c')\right] \\ & ({}_1\bar{f}' = s\,{}_1\bar{f}\,;\ {}_1\bar{\varphi}' = s\,{}_1\bar{\varphi}) \end{aligned}\right.$$

si ricava :

$$\begin{aligned} Max.\, {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\, s\, [O'\,(s\,O' + 1)\,(s\,O' - 1 + 3\,s\,c') - \\ - P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c') - Q'\,(s\,Q' + 1)\,(s\,Q' - 1 + 3\,s\,c')] \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} Max.\, {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}'\,[O'\,(O' + 1)\,(O' - 1 + 3\,c') - \\ - P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c') - Q'\,(Q' + 1)\,(Q' - 1 + 3\,c')]\,. \end{aligned} \tag{59}$$

con significato noto dei simboli.

Ne segue :

$$\begin{aligned} \frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{[j'_1\,(s\,j'_1 - 1)\,(s\,j'_1 + 1) - (j'_0 - 1)\,(s\,j'_0 - s + 1)\,(s\,j'_0 - s - 1)]}{[j'_1\,(j'_1 - 1)\,(j'_1 + 1) - (j'_0 - 1)\,j'_0\,(j'_0 - 2)]}\,\cdot \\ \cdot\frac{[O'\,(O' + 1)\,(O' - 1 + 3\,c') - P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c') +}{[O'\,(s\,O' + 1)\,(s\,O' - 1 + 3\,s\,c') - P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c') +}\,\cdot \\ \cdot\frac{- Q'\,(Q' + 1)\,(Q' - 1 + 3\,c')]}{- Q'\,(s\,Q' + 1)\,(s\,Q' - 1 + 3\,s\,c')]} \end{aligned} \tag{60}$$

Variante 2)

$$C \leq i_1 - j_1 \qquad (C' \leq i'_1 - j'_1)$$

si ha:

$$Max.\, B_{1,2} = \sum_{k=1}^{C+j_0} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l - k + C + c)\, \varphi_l + \sum_{k=C+j_0+1}^{\varphi+j_1} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l - k + C + c)\, \varphi_l$$

$$Max.\, B'_{1,2} = \sum_{k=1}^{\varphi'+j'_0} f'_k \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l - k + C' + c')\, \varphi'_l + \sum_{k=\varphi'+j'_1+1}^{\varphi'+j'_1} f'_k \sum_{l=k-\varphi'}^{j'_1} (l - k + C' + c')\, \varphi'_l$$

La condizione si scrive quindi in questo caso:

$$h''' \begin{cases} Max.\, B_{1,2} = {}_1\bar{f}\, {}_1\bar{\varphi} \left[\sum_{k=1}^{\varphi+j_0} \sum_{l=j_0}^{j_1} (l - k + C + c) + \sum_{k=C+j_0+1}^{\varphi+j_1} \sum_{l=k-C}^{j_1} (l - k + C + c) \right] \\ Max.\, B'_{1,2} = {}_1\bar{f}'\, {}_1\bar{\varphi}' \left[\sum_{k=1}^{\varphi'+j'_0} \sum_{l=j'_0}^{j'_1} (l - k + C' + c') + \sum_{k=C'+j'_0+1}^{\varphi'+j'_1} \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + c') \right] \\ ({}_1\bar{f}' = s\, {}_1\bar{f}\, ;\, {}_1\bar{\varphi}' = s\, {}_1\bar{\varphi}) \end{cases}$$

Se è soddisfatta anche questa condizione, oltre alle altre precedenti, si ottiene:

$$Max.\, {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}\, {}_1\bar{\varphi}\, s\, [O' (s\, O' - 1 + 3\, s\, c') - \\ - Q' (s\, Q' + 1)(s\, Q' - 1 + 3\, s\, c')] \tag{61}$$

$$Max.\, {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_1\bar{f}'\, {}_1\bar{\varphi}'\, [O' (O' + 1)(O' - 1 + 3\, c') - \\ - Q' (Q' + 1)(Q' - 1 + 3\, c')] \tag{62}$$

e quindi:

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{[j'_1 (s\, j'_1 - 1)(s\, j'_1 + 1) - (j'_0 - 1)(s\, j'_0 - s + 1)(s\, j'_0 - s - 1)]}{[j'_1 (j'_1 - 1)(j'_1 + 1) - (j'_0 - 1)\, j'_0\, (j'_0 - 2)]} \cdot \\ \cdot \frac{[O' (O' + 1)(O' - 1 + 3\, c') - Q' (Q' + 1)(Q' - 1 + 3\, c')]}{[O' (s\, O' + 1)(s\, O' - 1 + 3\, s\, c') - Q' (s\, Q' + 1)(s\, Q' - 1 + 3\, s\, c')]} \tag{63}$$

Qualora si abbia: $D = C = \frac{1}{2}(i_1 - j_1 + i_0 - j_0)$, queste ultime formule e le (56) e (57) si applicano anche alle variabili equidistribuite che rispondono allo schema del nostro caso III. Ripetendo il ragionamento fatto in precedenza, a proposito del caso I, varianti 2) e 3), sostituendo a j'_1, j'_0, i'_1 le espressioni più generali: $j'_1 - i'_0 + 1$, $j'_0 - i'_0 + 1$, $i'_1 - i'_0 + 1$ e avvalendosi delle relazioni: $j_1 - j_0 = s(j'_1 - j'_0 + 1) - 1$, $i_1 - i_0 = s(i'_1 - i'_0 + 1) - 1$, $j_0 - i_0 = s(j'_0 - i'_0)$, $j_1 - i_0 = s(j'_1 - i'_0 + 1) - 1$,
si trova per queste variabili:

$$I = \frac{4[(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - j_0 + 2)(j_1 - j_0) +}{4(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - j_0 + 2)(j_1 - j_0) +} \cdot$$

$$\cdot \frac{+ 3(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - i_0 + 1)(j_0 - i_0)]}{+ 3(j_1 - j_0 + 1)(i_1 - j_1 + j_0 - i_0)(i_1 + j_1 - j_0 - i_0 + 2)} = \tag{64}$$

$$= \frac{4[(j'_1 - j'_0 + 1)(sj'_1 - sj'_0 + s + 1)(sj'_1 - sj'_0 + s - 1) +}{4(j'_1 - j'_0 + 1)(sj'_1 - sj'_0 + s + 1)(sj'_1 - sj'_0 + s - 1) +} \cdot$$

$$\cdot \frac{+ 3s^2(j'_1 - j'_0 + 1)(j'_1 - j'_0 + 1)(j'_0 - i'_0)]}{+ 3s^2(j'_1 - j'_0 + 1)(i'_1 - j'_1 + j'_0 - i'_0)(i'_1 + j'_1 - j'_0 - i'_0 + 2)}$$

$$I' = \frac{4[(j'_1 - j'_0 + 1)(j'_1 - j'_0 + 2)(j'_1 - j'_0) +}{4(j'_1 - j'_0 + 1)(j'_1 - j'_0 + 2)(j'_1 - j'_0) +} \cdot$$

$$\cdot \frac{+ 3(j'_1 - j'_0 + 1)(j'_1 - i'_0 + 1)(j'_0 - i'_0)]}{+ 3(j'_1 - j'_0 + 1)(i'_1 - j'_1 + j'_0 - i'_0)(i'_1 + j'_1 - j'_0 - i'_0 + 2)} = \tag{65}$$

$$= \frac{4[(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - j_0 + 1 + s)(j_1 - j_0 + 1 - s) +}{4(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - j_0 + 1 + s)(j_1 - j_0 + 1 - s) +} \cdot$$

$$\cdot \frac{+ 3(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - i_0 + 1)(j_0 - i_0)]}{+ 3(j_1 - j_0 + 1)(i_1 - j_1 + j_0 - i_0)(i_1 + j_1 - j_0 - i_0 + 2)}$$

Si hanno quindi le seguenti espressioni per l'intensità di transvariazione fra due variabili continue e rettangolari, con:

$${}_cx_{i_0} \leq {}_cx_{j_0} < {}_cx_{j_1} \leq {}_cx_{i_1}:$$

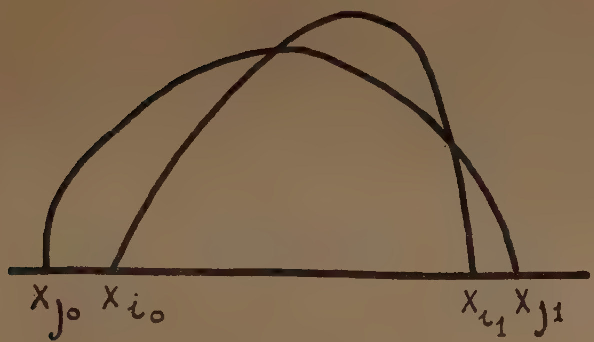
$${}_cI = \lim_{s \to 0} I' = \frac{4[(j_1 - j_0 + 1)^3 + 3(j_1 - j_0 + 1)(j_1 - i_0 + 1)(j_0 - i_0)]}{4(j_1 - j_0 + 1)^3 + 3(j_1 - j_0 + 1)(i_1 - j_1 + j_0 - i_0)(i_1 + j_1 - j_0 - i_0 + 2)} =$$

$$= \frac{4\left[(x_{j_1} - x_{j_0} + 1)^3 + 3\,(x_{j_1} - x_{j_0} + 1)\,(x_{j_1} - x_{i_0} + 1)\,(x_{j_0} - x_{i_0})\right]}{4\,(x_{j_1} - x_{j_0} + 1)^3 + 3\,(x_{j_1} - x_{j_0} + 1)\,(x_{i_1} - x_{j_1} + x_{j_0} - x_{i_0})\,(x_{i_0} + x_{j_1} - x_{j_0} - x_{i_0} + 2)} =$$

$$= \frac{4\left[({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})^3 + 3\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{i_0})\,({}_cx_{j_0} - {}_cx_{i_0})\right]}{4\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})^3 + 3\,({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})\,({}_cx_{i_1} - {}_cx_{j_1} + {}_cx_{j_0} - {}_cx_{i_0})\,({}_cx_{i_1} + {}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0} - x_{i_0})} = \tag{66}$$

$$= \frac{4\left[({}_cx_{j_1} - {}_cx_{i_0})^3 - ({}_cx_{j_0} - {}_cx_{i_0})^3\right]}{({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})\left[({}_cx_{j_1} - {}_cx_{j_0})^2 + 3\,({}_cx_{i_1} - {}_cx_{i_0})^2\right]}$$

Caso IV.



$$j_0 < i_0 < i_1 < j_1$$

In questo caso si ha:

$$B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{i_1} f_k \sum_{l=k+1}^{j_1} (l - k)\, \varphi_l$$

$$B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k+1}^{j'_1} (l - k)\, \varphi'_l$$

Se sono soddisfatte le condizioni a), b), c), d), e), f), e la condizione:

$$g'')\left\{\begin{array}{l} B_{1,2} = {}_0\bar{f}\;{}_0\bar{\varphi} \displaystyle\sum_{k=i_0}^{i_1} \sum_{l=k+1}^{j_1} (l - k) \\[2ex] B'_{1,2} = {}_0\bar{f}'\;{}_0\bar{\varphi}' \displaystyle\sum_{k=i'_0}^{i'_1} \sum_{l=k+1}^{j'_1} (l - k) \\[2ex] ({}_0\bar{f}' = s\;{}_0\bar{f}\,,\; {}_0\bar{\varphi}' = s\;{}_0\bar{\varphi}) \end{array}\right.$$

si ricava immediatamente :

$$
{}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\, {}_0\bar{f}\, {}_0\bar{\varphi}\, s[(s\,j_1' - s\,i_0' + s - 1)(j_1' - i_0' + 1)(s\,j_1' - s\,i_0' + s + 1) - \\
- (s\,j_1' - s\,i_1' - 1)(j_1' - i_1')(s\,j_1' - s\,i_1' + 1)] \tag{67}
$$

$$
{}_tB_{1,2}' = \frac{1}{6}\, {}_0\bar{f}'\, {}_0\bar{\varphi}'\, [(j_1' - i_0')(j_1' - i_0' + 1)(j_1' - i_0' + 2) - \\
- (j_1' - i_1' - 1)(j_1' - i_1)(j_1' - i_1' + 1)] \tag{68}
$$

Per *Max.* ${}_tB_{1,2}$ e *Max.* ${}_tB_{1,2}'$ si ottengono espressioni diverse a seconda che si abbia $C \geq i_0 - j_0$ o $C \leq i_0 - j_0$ (rispettivamente $C' \geq i_0' - j_0'$ e $C' \leq i_0' - j_0'$)

Variante 1ª).

$$
C \geq i_0 - j_0 \qquad (C' \geq i_0' - j_0')
$$

Si ha :

$$
Max.\, B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{C+j_0-1} f_k \sum_{l=j_0}^{j_1} (l - k + C + c)\,\varphi_l + \sum_{k=C+j_0}^{i_1} f_k \sum_{l=k-C}^{j_1} (l - k + C + c)\,\varphi_l
$$

$$
Max.\, B_{1,2}' = \sum_{k=i_0'}^{C'+j_0'-1} f_k' \sum_{l=j_0'}^{j_1'} (l - k + C' + c')\,\varphi_l' + \sum_{k=C'+j_0'}^{i_1'} f_k' \sum_{l=k-C'}^{j_1'} (l - k + C' + c')\,\varphi_l'
$$

espressioni identiche a quelle del caso I, variante 1ª).

Ponendo $j_0 = j_0' = 1$ e supposta verificata la condizione h) che in questo caso si scrive :

$$
\left\{
\begin{aligned}
& Max.\, B_{1,2} = {}_1\bar{f}\, {}_1\bar{\varphi} \left[\sum_{k=i_0}^{C} \sum_{l=1}^{j_1} (l - k + C + c) + \sum_{k=C+1}^{i_1} \sum_{l=k-C}^{j_1} (l - k + C + c) \right] \\
& Max.\, B_{1,2}' = {}_1\bar{f}'\, {}_1\bar{\varphi} \left[\sum_{k=i_0'}^{C'} \sum_{l=1}^{j_1'} (l - k + C' + c') + \sum_{k=C'+1}^{i_1'} \sum_{l=k-C'}^{j_1'} (l - k + C' + c') \right] \\
& ({}_1\bar{f}' = s\, {}_1\bar{f}\, ;\ {}_1\bar{\varphi}' = s\, {}_1\bar{\varphi})
\end{aligned}
\right.
$$

si trova:

$$Max.\,{}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\,s\,[O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') -$$
$$- P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c') - Q\,(s\,Q + 1)\,(s\,Q - 1 + 3\,s\,c')] \tag{69}$$

$$Max.\,{}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}\,[O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') -$$
$$- P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c') - Q\,(Q + 1)\,(Q - 1 + 3\,c')] \tag{70}$$

con significato noto dei simboli.

Di conseguenza:

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{[(s\,j'_1 - s\,i'_0 + s - 1)\,(j'_1 - i'_0 + 1)\,(s\,j'_1 - s\,i'_0 + s + 1) -}{[(j'_1 - i'_0)\,(j'_1 - i'_0 + 1)\,(j'_1 - i'_0 + 2) - (j'_1 - i'_1 - 1)} =$$

$$\frac{-(s\,j'_1 - s\,i'_1 - 1)\,(j'_1 - i'_1)\,(s\,j'_1 - s\,i'_1 + 1)]\,[O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3c') -}{(j'_1 - i'_1)\,(j'_1 - i'_1 + 1)]\,[O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') -} \tag{71}$$

$$\frac{- P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c') - Q\,(Q + 1)\,(Q - 1 + 3\,c')]}{- P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c') - Q\,(s\,Q + 1)\,(s\,Q - 1 + 3\,s\,c')]}$$

Variante 2ª).

$$C \leq i_0 - j_0 \quad (C' \leq i'_0 - j'_0)$$

$Max.\,B_{1,2}$ e $Max.\,B'_{1,2}$ hanno la stessa espressione come nel caso I, variante 2ª):

$$Max.\,B_{1,2} = \sum_{k=i_0}^{i_1} f_k \sum_{l=k-\varphi}^{j_1} (l - k + C + c)\,\varphi_l$$

$$Max.\,B'_{1,2} = \sum_{k=i'_0}^{i'_1} f'_k \sum_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + c')\,\varphi'_l$$

La condizione h) assume quindi la seguente forma:

$$\left\{\begin{array}{l} Max.\, B_{1,2} = {}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi} \sum\limits_{k=i_0}^{i_1} \sum\limits_{l=k-C}^{j_1} (l - k + C + c) \\ \\ Max.\, B'_{1,2} = {}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}' \sum\limits_{k=i'_0}^{i'_1} \sum\limits_{l=k-C'}^{j'_1} (l - k + C' + c') \\ \\ ({}_1\bar{f}' = s\,{}_1\bar{f}\,;\, {}_1\bar{\varphi}' = s\,{}_1\bar{\varphi}) \end{array}\right.$$

Si ricava :

$$\begin{aligned} Max.\, {}_tB_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}\,{}_1\bar{\varphi}\, s\,[O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') - \\ - P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c')] \end{aligned} \qquad (72)$$

$$\begin{aligned} Max.\, {}_tB'_{1,2} = \frac{1}{6}\,{}_1\bar{f}'\,{}_1\bar{\varphi}\,[O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') - \\ - P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c')] \end{aligned} \qquad (73)$$

e quindi :

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{[(s\,j'_1 - s\,i'_0 + s - 1)\,(j'_1 - i'_0 + 1)\,(s\,j'_1 - s\,i + s + 1) -}{[(j'_1 - i'_0)\,(j'_1 - i'_0 + 1)\,(j'_1 - i'_0 + 2) -}$$

$$\frac{-\,(s\,j'_1 - s\,i'_1 - 1)\,(j'_1 - i'_1)\,(s\,j'_1 - s\,i'_1 + 1)]}{-\,(j'_1 - i'_0 - 1)\,(j'_1 - i'_1)\,(j'_1 - i'_1 + 1)]} \cdot \qquad (74)$$

$$\cdot \frac{[O\,(O + 1)\,(O - 1 + 3\,c') - P\,(P + 1)\,(P - 1 + 3\,c')]}{[O\,(s\,O + 1)\,(s\,O - 1 + 3\,s\,c') - P\,(s\,P + 1)\,(s\,P - 1 + 3\,s\,c')]}$$

Se $D = C = \frac{1}{2}\,(i_1 - j_1 + i_0 - j_0)$, anche questa variante si applica a coppie di variabili equidistribuite. Con lo stesso procedimento usato prima, otteniamo per questo caso :

$$I = \frac{8\,[(j_1 - i_0)\,(j_1 - i_0 + 1)\,(j_1 - i_0 + 2) -}{(j_1 + i_1 - i_0 - j_0)\,(j_1 + i_1 - i_0 - j_0 + 2)\,(j_1 + i_1 - i_0 - j_0 + 4) -} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\,(j_1 - i_1 - 1)\,(j_1 - i_1)\,(j_1 - i_1 + 1)]}{-\,(j_1 - i_1 + i_0 - j_0 - 2)\,(j_1 - i_1 + i_0 - j_0)\,(j_1 - i_1 + i_0 - j_0 + 2)} =$$

$$= \frac{8[(s j_1' - s i_0' + s - 1)(j_1' - i_0' + 1)}{(s j_1' + s i_1' - s i_0' - s j_0' + 2s - 2)(j_1' + i_1' - i_0' - j_0')} \cdot$$

$$\cdot \frac{(s j_1' - s i_0' + s + 1) - (s j_1' - s i_1' - 1)}{(s j_1' + s i_1' - s i_0' - s j_0' + 2s + 2) - (s j_1' - s i_1' + s i_0' - s j_0' - 2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(j_1' - i_1')(s j_1' - s i_1' + 1)]}{(j_1' - i_1' + i_0' - j_0')(s j_1' - s i_1' + s i_0' - s j_0' + 2)} \tag{75}$$

$$I' = \frac{8[(j_1' - i_0')(j_1' - i_0' + 1)(j_1' - i_0' + 2) -}{(j_1' + i_1' - i_0' - j_0')(j_1' + i_1' - i_0' - j_0' + 2)(j_1' + i_1' - i_0' - j_0' + 4) -}$$

$$\frac{-(j_1' - i_1' - 1)(j_1' - i_1')(j_1' - i_1' + 1)]}{-(j_1' - i_1' + i_0' - j_0' - 2)(j_1' - i_1' + i_0' - j_0')(j_1' - i_1' + i_0' - j_0' + 2)} =$$

$$= \frac{8[(j_1 - i_0 + 1 - s)(j_1 - i_0 + 1)(j_1 - i_0 + 1 + s) -}{[(j_1 + i_1 - i_0 - j_0 + 2 - 2s)(j_1 + i_1 - i_0 - j_0 + 2)(j_1 + i_1 - i_0 - j_0 + 2 + 2s)}$$

$$\frac{-(j_1 - i_1 - s)(j_1 - i_1)(j_1 - i_1 + s)]}{-(j_1 - i_1 + i_0 - j_0 - 2s)(j_1 - i_1 + i_0 - j_0)(j_1 - i_1 + i_0 - j_0 + 2s)} \tag{76}$$

Se ne ricavano le seguenti espressioni per l'intensità di transvariazione fra due variabili continue e rettangolari che soddisfano alla relazione:

$${}_c x_{j_0} \leq {}_c x_{i_0} < {}_c x_{i_1} \leq {}_c x_{j_1}$$

$${}_t I = \lim_{s \to 0} I' = \frac{8[(j_1 - i_0 + 1)^3 - (j_1 - i_1)^3]}{(j_1 + i_1 - i_0 - j_0 + 2)^3 - (j_1 - i_1 + i_0 - j_0)^3} =$$

$$= \frac{8[(x_{j_1} - x_{i_0} + 1)^3 - (x_{j_1} - x_{i_1})^3]}{(x_{j_1} + x_{i_1} - x_{i_0} - x_{j_0} + 2)^3) - x_{j_1} - x_{i_1} + x_{i_0} - x_{j_0})^3} =$$

$$\tag{77}$$

$$= \frac{8[({}_c x_{j_1} - {}_c x_{i_0})^3 - ({}_c x_{j_1} - {}_c x_{i_1})^3]}{({}_c x_{j_1} + {}_c x_{i_1} - {}_c x_{i_0} - {}_c x_{j_0})^3 - ({}_c x_{j_1} - {}_c x_{i_1} + {}_c x_{i_0} - {}_c x_{j_0})^3} =$$

$$= \frac{4[({}_c x_{j_1} - {}_c x_{i_0})^3 - ({}_c x_{j_1} - {}_c x_{i_1})^3]}{({}_c x_{i_1} - {}_c x_{i_0})[({}_c x_{i_1} - {}_c x_{i_0})^2 + 3({}_c x_{j_1} - {}_c x_{j_0})^2]}$$

Riassumendo, si deve anzitutto mettere in rilievo che in tutti i casi esaminati il rapporto $\frac{{}_tI}{{}_tI'}$ risulta maggiore dell'unità e tende a crescere col crescere di s. Questa regola vale per distribuzioni di forma diversissima e anche per variabili rettangolari. Sembra quindi lecito concludere che, al contrario di quanto avviene nella maggior parte dei casi per la probabilità di transvariazione, la intensità di transvariazione tende a diminuire sistematicamente quando le modalità vengono raggruppate in classi. Occorre tuttavia notare che la diminuzione in generale è piuttosto esigua e può essere facilmente controbilanciata o anche sostituita da un aumento se, ad esempio, per effetto del raggruppamento in classi le due medie aritmetiche si avvicinano. La diminuzione, comunque, rimane la regola — anche se le eccezioni non dovrebbero essere rare — in quanto, notoriamente, il raggruppamento in classi non esercita una influenza sistematica sulla media aritmetica.

Ciò stabilito, rimane però ancora aperta la questione se le formule proposte possono essere effettivamente usate per risalire da I' a I. Riteniamo che la risposta possa essere affermativa. Se prescindiamo dalle condizioni secondo cui le modalità e in particolare anche quelle comprese nell'intervallo di transvariazione devono essere esattamente contenute in un certo numero di classi (condizioni queste, più che altro di comodo, che in pratica non hanno grande importanza, a meno che s non sia troppo elevato in confronto al numero complessivo delle modalità), rimangono per le frequenze 4 condizioni, esprimibili in altrettante equazioni, alle quali si aggiungono le disugualianze : $f_k > O$, $\varphi_l > 0$ ($k = i_0$, ... , i_1 ; $l = j_0$, ... , j_1). Subordinatamente alla possibilità di soddisfare queste ultime disuguaglianze, si potranno quindi sempre trovare coppie di distribuzione teoriche che coincidono con quelle effettive di partenza in tutte le frequenze meno quattro. È perciò piuttosto probabile, soprattutto se il numero complessivo delle modalità è abbastanza elevato, che il rapporto fra le due intensità di transvariazione di queste distribuzioni teoriche si approssimi bene a quello effettivo. Anche se ciò non si verifica per i numeratori e per i denominatori presi separatamente, si riscontrerà spesso la validità approssimativa della relazione :

$$\frac{{}_eB_{1,2}}{{}_eB'_{1,2}} : \frac{{}_tB_{1,2}}{{}_tB'_{1,2}} = \frac{Max.\ {}_eB_{1,2}}{Max.\ {}_eB'_{1,2}} : \frac{Max.\ {}_tB_{1,2}}{Max.\ {}_tB'_{1,2}}$$

dove ${}_eB_{1,2}$ e $Max\ .\ {}_eB_{1,2}$ rappresentano rispettivamente il numeratore e il denominatore dell'intensità di transvariazione tra le distribuzioni effettive di partenza, mentre ${}_eB'_{1,2}$ e $Max,\ {}_eB'_{1,2}$ si riferiscono alle distribuzioni raggruppate in classi. Anche in questo caso, che è tanto più probabile quanto maggiore è s, le nostre formule saranno approssimativamente valide.

Allo scopo di semplificare le formule date, osserviamo ancora che per s piccolo il rapporto $\dfrac{Max\ {}_tB'_{1,2}}{Max\ {}_tB'_{1,2}}$ è approssimato abbastanza bene (per eccesso) da $\dfrac{1}{s}$. Valendoci di ciò troviamo le seguenti formule approssimative, sempre per eccesso, nelle quali non appaiono più le differenze tra le medie aritmetiche:

CASO I.

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} \simeq 1 + \frac{s^2 - 1}{s^2\, t'\,(t' + 2)} \tag{78}$$

CASO II.

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} \simeq 1 + \frac{(s^2 - 1)\,(t' + 1)}{s^2[(j'_1 - 1)j'_1(j'_1 + 1) - (j'_1 - i'_1 - 1)\,(j'_1 - i'_1)\,(j'_1 - i'_1 + 1) - j'_0\,(j'_0 - 1)\,(j'_0 - 2)]} \tag{79}$$

CASO III

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} \simeq 1 + \frac{(s^2 - 1)\,(j - {}'_1 - j'_0 + 1)}{s^2\,[(j'_1 - 1)\,j'_1\,(j'_1 + 1) - j'_0\,(j'_0 - 1)\,(j'_0 - 2)]} \tag{80}$$

CASO IV.

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} \simeq 1 + \frac{(s^2 - 1)\,(i'_1 - i'_0 + 1)}{s^2[t'\,(t' + 1)\,(t' + 2) - (j'_1 - i'_1 - 1)\,(j'_1 - i'_1)\,(j'_1 - i'_1 + 1)]} \tag{81}$$

Occorre osservare infine che tutte le nostre formule sono fondate sul presupposto che sia verificata la disuguaglianza $s\,c' < 1$. Solo in tal caso, infatti, è possibile che siano verificate le condizioni: $s\,C' = C$ e $s\,c' = c$. Se invece, come in pratica avverrà spesso, $s\,c'$ sarà maggiore dell'unità, non potremo applicare senza altro le formule enunciate. Potremo però sempre supporre in questo caso che sia verificata l'eguaglianza: $s\,D' = D$, ossia $s\,C' + s\,c' = C + c$. Potremo quindi porre: $C = s\,C' + E = s\left(C' + \frac{E}{s}\right)$; $c = s\,c' - E = s\left(c' - \frac{E}{s}\right)$, dove E è il massimo intero contenuto in $s\,c'$. Bisognerà quindi sostituire nelle formule che danno $Max\;{}_tB_{1,2}$ e di conseguenza anche nel *denominatore* di $\frac{{}_tI}{{}_tI'}$ a C' l'espressione $C' + \frac{E}{s}$ ed a c' l'espressione $c' - \frac{E}{s}$. Naturalmente, anche per determinare la formula da applicare, bisognerà sostituire nelle disuguaglianze, che distinguono le diverse varianti l'una dall'altra $C' + \frac{E}{s}$ a C'. È da notare soltanto che la (40) si modifica in quanto il fattore $(C' + t' + 1)$ non è più comune a $Max\;{}_tB_{1,2}$ e $Max\;{}_tB'_{1,2}$ e non può perciò essere eliminato. Si avrà quindi, per il caso I, variante 4ª) con detta sostituzione:

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{s\,(s\,t' + s - 1)\,(s\,t' + s + 1)\,(C' + t' + 1)}{t'\,(t' + 2)\,(s\,C' + E + s\,t' + s)\,(s\,C' + E + s\,t' + s + 1)} \cdot \tag{40,a}$$

$$\cdot \frac{(C' + t' + 2)\,(C' + t' + 3\,c')}{(s\,C' + s\,t + s - 2\,E - 1 + 3\,s\,c')}$$

Riassumendo la parte dedicata all'intensità di transvariazione, riteniamo di aver dimostrato che, al contrario di quanto avviene per la probabilità, di transvariazione, il raggruppamento in classi esercita sui valori di tale indice un'influenza nel senso di ridurne il valore progressivamente al crescere dell'ampiezza delle classi. Questa regola è tuttavia suscettibile di numerose eccezioni, soprattutto se il raggruppamento in classi riduce la differenza fra le medie aritmetiche.

Quest'ultima circostanza limita anche la validità delle nostre formule di correzione, che tuttavia, in linea generale, dovrebbero riuscire di sicura utilità, in quanto si fondano su ipotesi assai poco restrittive.

Applicazioni.

Alcune delle formule di correzione sono state applicate a coppie di distribuzioni effettive, calcolando gli indici di transvariazione prima sui dati originari, poi sulle distribuzioni raggruppate in classi comprendenti da 2 a 10 modalità ciascuna e mettendo a raffronto i valori effettivi di P e I con quelli teorici ottenuti mediante le formule di correzione.

1° — Probabilità di transvariazione

Le distribuzioni delle stature di 1000 svedesi e 269 lapponi, che sono già state utilizzate in un lavoro del Gini [1] il quale gentilmente ha messo a mia disposizione i dati, hanno fornito i risultati riassunti nel seguente specchietto (M svedesi $>$ M lapponi)

P effettivo $= 0{,}120$ ($s = 1$)

s	P′	P teorico (formula 18)	P effettivo — P teorico
2	0,125	0,124	—0,004
3	0,126	0,118	0,002
4	0,135	0,123	—0,003
5	0,141	0,127	—0,007
6	0,153	0,125	—0,005
7	0,162	0,134	—0,014
8	0,178	0,132	—0,012
9	0,177	0,122	—0,002
10	0,214	0,182	—0,062

(1) C. Gini, *Sulla misura sintetica della transvariazione rispetto ad n caratteri* (*transvariazione n-dimensionale*) in « Atti della XI Riunione della Società italiana di Statistica », 1954.

L'andamento delle due distribuzioni giustifica in questo caso anche l'applicazione della formula (21). I risultati ottenuti sono qui riassunti :

s	P teorico	P effettivo — P teorico
2	0,124	—0,004
3	0,121	—0,001
4	0,127	—0,007
5	0,135	—0,015
6	0,138	—0,018
7	0,128	—0,008
8	0,116	0,004
9	0,148	—0,028
10	0,192	—0,072

Un'altra applicazione riguarda gli apprezzamenti dati da 323 studenti della Facoltà di Scienze Statistiche e Attuariali su un certo numero di professioni, apprezzamenti espressi con voti compresi fra 0 e 100. Le distribuzioni, poco rappresentative, in quanto probabilmente non rispecchiano un giudizio serio degli studenti, sono tutte estremamente irregolari, con le frequenze concentrate nei numeri terminanti in *O*. Abbiamo applicato la formula (18) alle distribuzioni concernenti le professioni degli Ingegneri e dei professori di Università.

I risultati sono i seguenti

$$(M_{\text{Prof. univ.}} > M_{\text{Ingegneri}})\ P_{\text{effettivo}} = 0{,}952$$

s	P′	P teorico	P effettivo — P teorico
2	0,950	0,948	—0,002
3	0,968	0,960	—0,008
4	0,945	0,939	—0,013
5	0,950	0,937	0,015
6	0,980	0,972	—0,020
7	0,982	0,982	—0,030
8	0,963	0,963	—0,011
9	0,980	0,979	—0,027
10	0,976	0,972	—0,020

Mentre nell'esempio precedente la formula di correzione ha comportato sempre un miglioramento rispetto a P', in questo caso si registrano 4 miglioramenti ($s = 3, 6, 9, 10$) e 3 peggioramenti ($s = 2, 4, 5$), mentre in 2 casi ($s = 7, 8$) il termine di correzione risulta nullo.

Un'ultima applicazione riguarda infine le distribuzioni per età dei deputati e dei Senatori dell'attuale Parlamento Italiano, secondo i dati raccolti dal dott. Fernando PEDRONI [1]. I risultati ottenuti sempre con la formula (18) appaiono soddisfacenti come si vede dal seguente specchietto :

$$P_{\text{effettivo}} = 0{,}430$$

s	P′	P teorico	P effettivo — P teorico
2	0,432	0,430	—
3	0,435	0,434	—0,004
4	0,432	0,433	—0,003
5	0,438	0,448	—0,018
6	0,449	0,425	0,005
7	0,430	0,415	0,015
8	0,460	0,437	—0,007
9	0,455	0,424	0,006
10	0,455	0,420	0,010

2°. — INTENSITÀ DI TRANSVARIAZIONE

Abbiamo applicato alle stesse distribuzioni anche le formule di correzione per l'intensità di transvariazione.

Nel primo esempio (stature di svedesi e lapponi) si ha sempre :

$$j_0' < i_0' < j_1' < i_1' \,;\, s\,c' > 1 \quad \text{e} \quad i_0' - j_0' > C' + E' > i_1' - j_1'$$

Bisogna quindi applicare la (34), con le sostituzioni : $C' = C' + \dfrac{E}{s}$ e $c' = c' - \dfrac{E}{s}$ nel denominatore. Per i vari valori di s si ottengono così i seguenti risultati :

(1) Vedi : FERNANDO PEDRONI, *Il parlamento italiano del 7 giugno 1953*, in « Atti della XIII e XIV riunione scientifica della Società Italiana di Statistica ».

$I_{\text{effettivo}} = 0{,}060$

s	I'	I teorico	I effettivo — I teorico
2	0,062	0,062	—0,002
3	0,058	0,059	0,001
4	0,061	0,062	—0,002
5	0,059	0,060	—
6	0,058	0,060	—
7	0,055	0,057	0,003
8	0,063	0,065	—0,005
9	0,046	0,051	0,009
10	0,061	0,064	—0,004

L'approssimazione è in generale soddisfacente.

Per quanto riguarda il 2º esempio (valutazione delle espressioni dei Professori Universitari e degli Ingegneri), si ha sempre $i'_0 = j'_0$, $i'_1 = j'_1$, $s\,c' < 1$ e $C' = 0$

Tutte le formule di correzione da noi date si riducono perciò alla semplice espressione :

$$\frac{{}_tI}{{}_tI'} = \frac{(s\,j'_1 - 1)\,(j'_1 - 1 + 3\,c')}{(j'_1 - 1)\,(s\,j'_1 - 1 + 3\,s\,c')}$$

I risultati ottenuti sono riportati qui :

I effettivo $= 0{,}962$

s	I'	I teorico	I effettivo — I teorico
2	0,979	0,980	—0,018
3	0,998	0,998	—0,036
4	0,952	0,957	0,005
5	0,960	0,965	—0,003
6	1	1	—0,038
7	0,994	0,995	—0,033
8	0,943	0,957	0,005
9	0,967	0,976	—0,014
10	0,929	0,942	0,020

L'irregolarità delle distribuzioni si manifesta fra l'altro nel fatto che per $s \leq 7\,I'$ è maggiore di P' e non mostra tendenza a

diminuire. Di conseguenza, le approssimazioni ottenute con la formula di correzione sono peggiori che nell'esempio precedente e la correzione, che è naturalmente dannosa per $I' > I$, risulta utile solo nei casi : $s = 4$, $s = 8$ e $s = 10$, mentre è praticamente nulla nel caso $s = 3$ e nulla nel caso $s = 6$ in cui si ha : $c' = 0$.

Nel terzo esempio (età dei Deputati e dei Senatori) si ha sempre :

$$j_0' < i_0' < j_1' < i_1' \,;\; s\,c' > 1 \quad \text{e} \quad i_0' - j_0' \geq C' + \frac{E}{s} > i_1' - j_1' \,.$$

Si deve quindi applicare la (34) con le note sostituzioni al denominatore. I risultati sono i seguenti :

I effettivo = 0,292

s	I'	I teorico	I effettivo — I teorico
2	0,293	0,293	—0,001
3	0,291	0,292	—
4	0,298	0,300	—0,008
5	0,286	0,291	0,001
6	0,295	0,299	—0,007
7	0,303	0,310	—0,013
8	0,306	0,313	—0,021
9	0,276	0,285	0,007
10	0,281	0,292	—

Anche qui la correzione risulta più efficace per i valori più elevati di s.

RIASSUNTO

L'A. studia, in base ad opportune ipotesi semplificatrici, le modificazioni che la probabilità e l'intensità di transvariazione subiscono quando le modalità vengono raggruppate in classi e dimostra che in generale tale raggruppamento provoca un aumento dei valori della probabilità e una diminuzione di quelli dell'intensità di transvariazione. Elabora alcune formule di correzione che permettono di risalire agli indici calcolati sulle distribuzioni raggruppate agli indici corrispondenti calcolate sulle distribuzioni originarie e determina l'intensità di transvariazione fra due variabili continue distribuite uniformemente. Seguono alcune applicazioni delle formule di correzione.

BIBLIOGRAFIA SULLA TRANSVARIAZIONE

1. G. Gini. — *Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni*, « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica, Roma », 1916, e riprodotto con aggiunte in *Memorie di Metodologia Statistica*, vol. I, Milano, 1939, pg.

2. M. Boldrini. — *Su alcune differenze sessuali secondarie nelle dimensioni del corpo umano alla nascita e alle età superiori*, « Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia », vol. XLIX, 1919.

3. M. Boldrini. — *I cadaveri degli sconosciuti, ricerche demografiche e antropologiche sul materiale della Morgue di Roma*, « Scuola positiva », 1920.

4. M. Boldrini. — *Differenze sessuali nel peso del corpo e degli organi umani*. « Rendiconti della R. A. dei Lincei », vol. XXIX s. V fasc. 1-4, 1920.

5. M. Boldrini. — *Gli studi statistici sul sesso: la proporzione dei sessi nelle nascite e i caratteri sessuali secondari*, « Rassegna di studi sessuali », 1921.

6. M. Boldrini. — *Misure interne ed esterne di alcune ossa lunghe nell'uomo e nella donna*, « Rendiconti della R. A. dei Lincei », vol. XXXIII s. V fasc. 7-10, 1924.

7. V. Castellano. — *Sullo scarto quadratico medio della probabilità di transvariazione*, « Metron », vol. XI n. 4, 1934.

8. G. Ottaviani. — *Sulla probabilità che una prova su due variabili casuali* X *e* Y *verifichi la disuglianza* $X<Y$ *e sul corrispondente scarto quadratico medio*. « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », Roma, 1939.

9. G. Ottaviani. — *Sullo scarto quadratico medio della frequenza di transvariazione*, « Atti della I Riunione della Società Italiana di Statistica », 1939.

10. G. Gini. — *Per la determinazione della probabilità di transvariazione tra più gruppi*, « Atti della V Riunione della Società Italiana di Statistica », 1942.

11. G. Gini e G. Livada. — *Transvariazione a più dimensioni*, « Atti della VI Riunione della Società Italiana di Statistica », 1943.

12. G. Livada. — *Procedimento per il calcolo della intensità di transvariazione*, « Atti della VI Riunione della Società Italiana di Statistica », 1953.

13. C. Gini e G. Livada. — *Nuovi contributi alla teoria della transvariazione*, « Atti della VII Riunione della Società Italiana di Statistica », 1943.

14. D. Miani Calabrese. — *La transvariazione rispetto al sesso dei caratteri fisici dell'infanzia*, « Statistica », Ferrara, ott.-dic. 1943.

15. C. Gini e G. Sonnino. — *Contributo alla teoria della transvariazione fra seriazioni correlate*, « Atti della XI Riunione della Società Italiana di Statistica », 1951.

16. C. Gini. — *A measurement of the differences between two quantity groups, in particular between the characteristics of two populations*, in « Acta Genetica et Statistica Medica » n. 4, 1953.

17. C. Gini. — *Della misura sintetica della transvariazione rispetto ad* n *caratteri* (*transvariazione* n-*dimensionale*), « Atti della XI Riunione della Società Italiana di Statistica », 1951.

18. L. De Lucia. — *Transvariazione tra caratteri connessi*, « Atti della XII Riunione della Società Italiana di Statistica », 1952.

19. P. Steriotis. — *Contributo alla transvariazione delle distribuzioni gaussiane*, (in greco, con riassunto in inglese).

20. A. Filipponi. — *Sul grado di stabilità nei caratteri di Protomagalhaensia Marottai* (Sporozoa, Gregarinidae), « Rivista di Parassitologia », vol. XIV n. 3 luglio 1953 e « Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità », parte VII, 1954.

21. F. Pedroni. — *Il parlamento italiano del 7 giugno 1953*, « Atti della XIII e XIV Riunione scientifica della Sooietà Italiana di Statistica », 1955.

22. C. Gini, C. Viterbo, C. Benedetti, A. Herzel. — *Problemi di transvariazione inversa* « Metron » vol. XIX n. 1 - 2, 1957.

23. A. Herzel. — *Influenza del raggruppamento in classi sulla probabilità e sulla intensità di transvariazione*, « Metron », vol. XIX, n. 1 - 2, 1957.

In un volume in corso di stampa, a cura della Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali della Università di Roma, dal titolo *Transvariazione*, sono riportati gli articoli e memorie di cui ai nn. 1, dal 7 al 15, dal 17 al 19 e dal 21 al 22 (alcuni dei quali — nn. 8, 15, 17 e 22 — sono corredati da ulteriori applicazioni della dott. M. De Novellis, e sono inoltre, per la prima volta, date alle stampe le note seguenti :

24. G. Ottaviani. — *Sulla probabilità di transvariazione.*

25. C. Dagum. — *Transvariazione tra più di due distribuzioni.*

26. C. Gini. — *Della selezione indiretta.*

27. G. Ottaviani. — *Alcune considerazioni sul concetto di transvariazione* — con applicazioni della dott. M. De Novellis.

28. M. De Novellis. — *Ulteriori contributi alla teoria della transvariazione: gli indici di transvariazione nel caso di distribuzioni che diano luogo a curve iperboliche e applicazioni.*

29. M. De Novellis. — *Procedimenti e distribuzioni dei calcoli per la determinazione della intensità di transvariazione tra due gruppi* (*Metodi di Livada, Boldrini, Gini*).

30. M. De Novellis. — *Applicazioni della teoria della transvariazione allo studio di alcuni problemi di antropometria e biologia* (riassunto delle applicazioni di Boldrini e Filipponi). citale ai nn. 2, 3, 4, 5, 6, e 20 di questa bibliografia).

Z.W. BIRNBAUM

On an inequality due to S. Gatti

In [1] the following statement was proven: let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be real numbers, and $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$. Then

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2 \leq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - \bar{a} | \right)^2 \tag{1}$$

The aim of this note is to propose the following generalization of inequality (1):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - \bar{a} |^r \leq \left(\frac{n}{2} \right)^{r-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - \bar{a} | \right)^r \tag{2}$$

for any $r \geq 1$.

Proof: assuming without loss of generality $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ and setting

$$b_i = a_i - \bar{a} \tag{3}$$

one has

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0\,, \qquad b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n\,.$$

Hence there exists k such that

$$b_i \leq 0 \quad \text{for} \quad i \leq k\,, \qquad\qquad b_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i \geq k+1\,,$$

$$-\sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=k+1}^{n} b_i = c$$

and therefore

$$c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} | b_i | . \tag{4}$$

In view of $r \geq 1$ we have

$$\sum_{i=1}^{k} | b_i |^r \leq \left(\sum_{i=1}^{k} | b_i | \right)^r = c^r , \qquad \sum_{i=k+1}^{n} | b_i |^r \leq \left(\sum_{i=k+1}^{n} | b_i | \right)^r = c^r \tag{5}$$

and from (4) and (5) follows

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | b_i |^r \leq \frac{2\, c^r}{n} = \left(\frac{n}{2} \right)^{r-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | b_i | \right)^r \tag{6}$$

which by virtue of (3) is equivalent with (2).

Similarly as in [1] it may be observed that equality in (6) holds if and only if equality is attained in both inequalities (5), which is possible if and only if

$$b_1 \leq 0,\ b_2 = \ldots = b_k = b_{k+1} = \ldots = b_{n-1} = 0, \quad b_n \geq 0$$

and, in view of $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$,

$$b_1 = - b_n .$$

Equality in (2) is, therefore, attained if and only if

$$a_1 \leq \bar{a},\ a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1} = \ldots = a_{n-1} = \bar{a} ,$$

$$a_n \geq \bar{a} ,\ \bar{a} - a_1 = a_n - \bar{a} .$$

REFERENCE

[1] S. Gatti, *Sul massimo di un indice di anormalità*, « Metron » 18 (1956) pp. 181-188.

M. DE NOVELLIS

Some applications and developments of Gatti-Birnbaum inequality

Some statistical applications have been made in order to estimate the amount of the inequality of Gatti-Birnbaum (ref. [1], [2]).

The statistical data considered are the following (Table I):

— Weights (in grams) of 41 new-born children from M. Boldrini, *Su alcune differenze sessuali secondarie nelle dimensioni del corpo umano alla nascita e alle età superiori*, « Archivio per l'Antropologia e la Etnologia », 1919. Firenze.

— Frequencies of school-votes, from C. Gini, *Corso di Statistica*, edited by S. Gatti and C. Benedetti 1954-55, Rome, Veschi.

— Classification of 164 families with regard to the number of children from C. Gini, *Il sesso dal punto di vista statistico*, 1908, (Library of « Metron », Rome).

The results obtained are contained in Table II.

They show that, as r increases, the ratio $\frac{B_r}{A_r}$ also increases; this monotonic character of $\frac{B_r}{A_r}$ may be also proved by the following considerations suggested to me by C. Benedetti.

The inequality:

$$\frac{B_{r+1}}{A_{r+1}} > \frac{B_r}{A_r} \tag{1}$$

TABLE I

Weight of 41 new-born children	School-votes	Frequencies	N. sons	N. families
2080	1	0	2	12
2100	2	0	3	18
2210	3	1	4	19
2210	4	1	5	11
2280	5	3	6	13
2305	6	4	7	22
2460	7	1	8	19
2510	8	2	9	13
2650	9	0	10	12
2722	10	0	11	5
2760	arithmetic average $\bar{a} = 7{,}55$		12	5
2780			13	5
2850			14	4
2880			15	3
2890			16	0
3010			17	1
3050			18	1
3060			19	1
3100			arithmetic average $\bar{a} = 7{,}104$	
3130				
3130				
3140				
3200				
3220				
3290				
3290				
3315				
3350				
3360				
3440				
3450				
3460				
3510				
3510				
3550				
3560				
3700				
3840				
3870				
3890				
3960				
arithmetic average $\bar{a} = 3075$				

TABLE II

	Values of r	$A_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert a_i - \bar{a} \rvert^r$	$B_r = \left(\frac{n}{2}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert a_i - \bar{a} \rvert\right)^r$	B_r/A_r
Weights of 41 newborn children	2	259·757	3·558.889	13,7
	3	191.166.219	30·398.249·450	159,1
Frequencies of school-votes	2	2,02	7,59	3,8
	3	4,35	51,26	11,8
	4	10,10	345,99	34,3
Families about the number of sons	2	12,99	666,91	51,3
	3	76,64	155·958,63	2035
	4	553,81	36·471·237,67	65855,1

is true if this other inequality (in which the same notations adopted by Z.W. Birnbaum in ref. [2] are used) is true :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} | b_i |^{r+1}}{\sum_{i=1}^{n} | b_i |^r} < \frac{\sum_{i=1}^{n} | b_i |}{2} = c \tag{2}$$

but the (2) is true in general because

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} | b_i |^{r+1}}{\sum_{i=1}^{n} | b_i |^r}$$

is a weighted average of the $| b_i |$ with weights $| b_i |^r$, hence we have :

$$m_r \leq \max | b_i | \leq c$$

with equality if n-2 terms $| b_i |$ are null and 2 terms $| b_i |$ are greater than zero.

REFERENCES

[1] S. GATTI, *Sul massimo di un indice di anormalità*, «Metron» 18 (1956), pp. 181-188.

[2] Z. W. BIRNBAUM, *On an inequality due to S. Gatti*, «Metron» 19 (1958), pp. 243-244

THE ANNALS OF MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 29, No. 2 — June 1958

NOTES